

Appendix A

Using Replica Equivalence to compute connected quantities.

Now we have to deal with harder terms which appear in the calculation of G_c and involve the probability distribution of three and four overlaps. The numerator reads: $\overline{\langle q^2 \rangle^2} - 2\overline{\langle q^2 \rangle \langle q \rangle^2} + \overline{\langle q \rangle^4} - (\overline{\langle q^2 \rangle} - \overline{\langle q \rangle^2})^2$ and the denominator reads: $\overline{\langle q^4 \rangle} + 6\overline{\langle q^2 \rangle \langle q \rangle^2} - 3\overline{\langle q \rangle^4} - 4\overline{\langle q^3 \rangle \langle q \rangle} - (\overline{\langle q^2 \rangle} - \overline{\langle q \rangle^2})^2$ so that we have to compute:

$$\overline{\langle q^2 \rangle \langle q \rangle^2} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} \sum_{a,b,c,d,e,f} Q_{ab}^2 Q_{cd} Q_{ef} \quad (\text{A.1})$$

$$\overline{\langle q \rangle^4} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} \sum_{a,b,c,d,e,f,g,h} Q_{ab} Q_{cd} Q_{ef} Q_{gh} . \quad (\text{A.2})$$

As we have already pointed in section III, these terms will depend in general in terms containing $P(q)$ and terms which depend on the probability distribution of 3 or 4 connected overlaps, terms like $\sum_{a,b,c} Q_{ab}^k Q_{bc}^l Q_{ca}^p$ and $\sum_{a,b,c,d} Q_{ab}^k Q_{bc}^l Q_{ca}^p Q_{da}^t$ where replica equivalence cannot be used since we have in general that: $\sum_b Q_{ab}^k Q_{bc}^l$ depends on the replica indexes a and c , so that for any particular structure of the replica matrix Q_{ab} will have different values.

■ Quantities involving three overlaps.

Now we will derive the general relation for any term containing three overlaps such as (A.1). The general term is:

$$\begin{aligned} \sum_{a,b,c,d,e,f} Q_{ab}^k Q_{cd}^l Q_{ef}^m &= \sum_{a,b,c,d} Q_{ab}^k Q_{cd}^l \sum_{e,f} Q_{ef}^m - 4 \\ &\quad \sum_{a,b,c,d,e} Q_{ab}^k Q_{cd}^l Q_{eb}^m - 4 \sum_{a,b,c,d,e} Q_{ab}^k Q_{cd}^l Q_{ec}^m . \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

The first term can be computed from identity (3.23), since we have:

$$\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} \sum_{(a,b,c,d)} Q_{ab}^k Q_{cd}^l \sum_{e,f} Q_{ef}^m = \frac{n(n-1)}{(n-4)(n-5)} \overline{\langle q^l \rangle \langle q^k \rangle \langle q^m \rangle} . \quad (\text{A.4})$$

The other two terms on the r.h.s of relation (A.3) are identical by permuting sub-indexes (d, b) and super-indexes (l, k) so that we only have to compute one of them: $\sum_{a,b,c,d,e} Q_{ab}^k Q_{cd}^l Q_{eb}^m$. We can

apply RE (3.21) to the sum of index e and obtain:

$$\begin{aligned} \sum_{a,b,c,d,e} Q_{ab}^k Q_{cd}^l Q_{eb}^m &= \sum_{a,b,c,d} Q_{ab}^k Q_{cd}^l \left(\frac{\sum_{e,b} Q_{eb}^m}{n} \right) - \sum_{a,b,c,d} Q_{ab}^{k+m} Q_{cd}^l \\ &\quad - 2 \sum_{a,b,c,d} Q_{ab}^k Q_{cd}^l Q_{cb}^m. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Again we make use of identity (3.23) to compute the two first terms on the r.h.s of the previous identity, so that we are only left with the last term: $\sum_{a,b,c,d} Q_{ab}^k Q_{cd}^l Q_{cb}^m$. By applying the RE to the sum over d we finally get:

$$\sum_{a,b,c,d} Q_{ab}^k Q_{cd}^l Q_{cb}^m = \sum_{a,b,c} Q_{ab}^k Q_{cb}^m \left(\frac{\sum_{d,c} Q_{d,c}^l}{n} \right) - \sum_{a,b,c} Q_{ab}^k Q_{cb}^m Q_{ca}^l - \sum_{a,b,c} Q_{ab}^k Q_{cb}^{m+l}. \quad (\text{A.6})$$

So, now, we know how to compute all the terms in function of the probability distribution of one overlap except for the term $\sum_{a,b,c} Q_{ab}^k Q_{cb}^m Q_{ca}^l$. Putting all terms together we obtain the following expression for the general element which involves the probability distribution of three overlaps,

$$\begin{aligned} \overline{\langle q^k \rangle \langle q^l \rangle \langle q^m \rangle} &= \frac{(n-4)(n-8) + 8(n-1)(n-1)^2}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} \frac{\sum_{ab} Q_{ab}^k}{n(n-1)} \frac{\sum_{ab} Q_{ab}^l}{n(n-1)} \frac{\sum_{ab} Q_{ab}^m}{n(n-1)} \\ &\quad + \frac{16 \sum_{ab} Q_{ab}^{l+m+k} - 8(n-2) \sum_{a,b,c} Q_{ab}^k Q_{cb}^m Q_{ca}^l}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} \\ &\quad + \frac{2(n-8)(n-1)}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} \left(\frac{\sum_{ab} Q_{ab}^{k+l}}{n(n-1)} \frac{\sum_{ab} Q_{ab}^m}{n(n-1)} \right) \\ &\quad + \frac{\sum_{ab} Q_{ab}^{m+l}}{n(n-1)} \frac{\sum_{ab} Q_{ab}^k}{n(n-1)} + \frac{\sum_{ab} Q_{ab}^{k+m}}{n(n-1)} \frac{\sum_{ab} Q_{ab}^l}{n(n-1)} \\ &= \frac{(n-4)(n-8) + 8(n-1)(n-1)^2}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} q_k q_l q_m \\ &\quad + \frac{2(n-8)(n-1)}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} (q_k q_{m+l} + q_l q_{m+k} + q_m q_{k+l}) \\ &\quad + \frac{16}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} q_{m+l+k} \\ &\quad - \frac{8(n-2)}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} Q_{k,l,m}^3. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Where we have introduced the following definitions:

$$\begin{aligned} Q_{k,l,m}^3 &\equiv \int dq_1 dq_2 dq_3 P(q_1, q_2, q_3) q_1^l q_2^k q_3^m \quad \text{and} \\ Q_{k,l,m,p}^4 &\equiv \int dq_1 dq_2 dq_3 P(q_a, q_b, q_c, q_d) q_a^l q_b^k q_c^m q_d^p. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Finally we get the following expression for the term (A.1):

$$\begin{aligned} \overline{\langle q^2 \rangle \langle q \rangle^2} &= \frac{(n-4)(n-8) + 8(n-1)(n-1)^2}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} q_1^2 q_2 \\ &\quad + \frac{2(n-8)(n-1)}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} (q_2^2 + 2q_1 q_3) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$+ \frac{16}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} q^4 - \frac{8(n-2)}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} Q_{1,1,1}^3 .$$

For the other term, $\overline{\langle q \rangle^4}$, calculations require more effort since one has to deal with terms involving four overlaps, but the procedure is similar. We only quote the final result:

$$\begin{aligned} \overline{\langle q \rangle^4} &= \frac{((n-1)^3(-672 + n(208 + (n-24)n))}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)} q_1^4 \\ &+ \frac{12(n-1)^2(112 + (n-20)n)}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)} q_1^2 q_2^2 \\ &- \frac{32(n-12)(n-1)}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)} q_1 (-2q_3 + (n-2) Q_{1,1,1}^3) \\ &+ \frac{12((n-16)(n-1))}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)} q_2^2 \\ &+ \frac{20}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)} q^4 \\ &- \frac{4(n-2)}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)} (8 Q_{2,1,1}^3 - (n-3) Q_{1,1,1,1}^4) . \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Further calculations lead to a rather intricate expression for G_c in the limit $n \rightarrow 0$:

$$G_c = \frac{49q_1^4 - 77q_1^2q_2 + q_2^2 + 60q_1q_3 - 18q_4 + 18Q_{2,1,1}^3 - 24q_1 Q_{1,1,1,1}^3 - 9 Q_{1,1,1,1}^4}{133q_1^4 - 329q_1^2q_2 - 38q_2^2 + 240q_1q_3 - 51q_4 - 54 Q_{2,1,1}^3 + 72q_1 Q_{1,1,1}^3 + 27Q_{1,1,1,1}^4} . \quad (\text{A.11})$$

From which the following results for A_c and B_c are obtained:

$$A_c = \frac{-49q_1^4 + 77q_1^2q_2 - q_2^2 - 60q_1q_3 + 18q_4 - 18 Q_{2,1,1}^3 + 24q_1 Q_{1,1,1,1}^3 + 9 Q_{1,1,1,1}^4}{70(q_2 - q^2)^2} , \quad (\text{A.12})$$

$$B_c = 3 \frac{91q_1^4 - 203q_1^2q_2 + 34q_2^2 + 80q_1q_3 - 17q_4 - 18 Q_{2,1,1}^3 + 24q_1 Q_{1,1,1,1}^3 + 9 Q_{1,1,1,1}^4}{140(q_2 - q^2)^2} . \quad (\text{A.13})$$

Thus, one has to go to particular structures of the replica matrix Q_{ab} to try to obtain a simpler expression for B , A , G_c , B_c , and A_c .

One-step replica symmetry breaking

In this particular case the structure of the replica matrix is the following: replicas are distributed into m blocks, so that the matrix elements can have two possible values q_1 if the two replicas belong to the same block and q_0 if they belong to different blocks. Thus, we have for the different terms which appear in the calculation of G_c , A , A_c , B and B_c :

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{a,b} Q_{ab}^k = \frac{(m-1)q_1^k + (n-m)q_0^k}{n-1} , \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum_{a,b,c} Q_{ab} Q_{bc} Q_{ca} &= \\ \frac{q_1(m-1)[q_1^2(m-2) + q_0^2(n-m)] + q_0(n-m)[2q_1q_0(m-1) + q_0^2(n-2m)]}{n-1} , \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum_{a,b,c} Q_{ab}^2 Q_{bc} Q_{ca} = \frac{q_1^2(m-1)[q_1^2(m-2) + q_0^2(n-m)] + q_0^2(n-m)[2q_1q_0(m-1) + q_0^2(n-2m)]}{n-1}, \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{a,b,c,d} Q_{ab} Q_{bc} Q_{cd} Q_{da} &= (m-1)((m-3)(m-2) q_1^4 - 2(3m-5)(m-n) q_1^2 q_0^2 \\ &+ 4(2m^2 - 3mn + n^2) q_1 q_0^3) \\ &- (3m^2 + m(2-3n) + (n-1)^2)(m-n)q_0^4. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Substituting all these previous expressions into relations (A.10), (A.6), (A.9) yields, in the limit $n \rightarrow 0$ the expression already given in section III for the connected quantities G_c (3.31), A_c (3.32) and B_c (3.33) :

$$G_c = \frac{39 - 113m + 98m^2}{93 - 221m + 266m^2}. \quad (\text{A.18})$$

In the same way we obtain expressions for A_c and B_c which do not depend on the actual values of the elements of the replica matrix:

$$A_c = \frac{39 - 113m + 98m^2}{140m(1-m)} \text{ and } B_c = \frac{3(31 - 167m + 182m^2)}{280m(1-m)}. \quad (\text{A.19})$$

For the other disconnected quantities, A and B we obtain an expression which depends not only on m but also on the elements of Q_{ab} , this is, q_0 and q_1 . The expressions are the following:

$$A = -\frac{(m-1) m (q_1^2 - q_0^2)^2}{3((m-1) q_1^2 - m q_0^2)^2}, \quad (\text{A.20})$$

$$B = \frac{(m-1) q_1^4 - m q_0^4 + 3((m-1) q_1^2 - m q_0^2)^2}{2((m-1) q_1^2 - m q_0^2)^2}. \quad (\text{A.21})$$

Comparing A, B to the other connected parameters we find a further dependence on the parameters q_0, q_1 . Computations for further steps of RSB are performed in the same way. However for a two-step patten for Q_{ab} , we do not obtain a simple expression from which it is possible to extract general conclusions.

Appendix B

Using the Transfer Matrix Method to compute the generation function of the overlaps in the 1-dimensinal Ising spin glass

The object of this appendix is to show in detail how the generator of the moments of the overlap

$$\overline{\langle e^{yq} \rangle^m} \quad (\text{B.1})$$

is computed for the Ising spin-glass chain using the Transfer Matrix Method. The goal is to compute the quantities which enter in the definition of parameters A and G so that, as explained ins Sec. 3.1 we can restrict our calculation to the cases $m = 1, 2$.

Case $m = 1$

This is the simplest case. The transfer matrix associated to each pair of neighbouring lattice sites is just (3.47). Thus, once averaged over the disorder the contribution from each site reads,

$$\overline{T} = \overline{t_i} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{\frac{y}{V}}(1 + \overline{x}) & (1 - \overline{x}) \\ (1 - \overline{x}) & e^{-\frac{y}{V}}(1 + \overline{x}) \end{pmatrix} \quad \overline{x} \equiv \overline{\tanh(\beta J_i)^2} \quad (\text{B.2})$$

As explained in the general procedure, the following step is to diagonalise this matrix. The set of eigenvectors and eigenvalues of the matrix \overline{T} are,

$$\lambda_{+,-} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\overline{x}}}{2} \quad (\text{B.3})$$

$$\overrightarrow{\lambda_{+,-}} = \frac{1}{C_{\pm}} (1, -\beta \pm \sqrt{1 + \beta^2}) \quad C_{\pm} = [2(1 + \beta^2 \mp \beta \sqrt{1 + \beta^2})]^{1/2} \quad (\text{B.4})$$

$$\alpha \equiv (1 + \overline{x}) \cosh\left(\frac{y}{V}\right) \quad \beta \equiv \frac{1 + \overline{x}}{1 - \overline{x}} \sinh\left(\frac{y}{V}\right)$$

From here it follows that the matrix which expresses the eigenvectors $\overrightarrow{\lambda_{+,-}}$ in the original basis reads,

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_+} & \frac{1}{C_-} \\ \frac{-\beta + \sqrt{1 + \beta^2}}{C_+} & \frac{-\beta - \sqrt{1 + \beta^2}}{C_-} \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Now, recalling the general expression obtained for the generator (3.53) which for $m = 1$ reads,

$$\overline{\langle e^{yq} \rangle} = \text{Tr } M \overline{T}_\lambda^{V-1} M^T Q_1 \quad (\text{B.6})$$

$$\text{where } Q_1 = \begin{pmatrix} e^{\frac{y}{V}} & 1 \\ 1 & e^{-\frac{y}{V}} \end{pmatrix},$$

we only have to substitute the expressions for M (B.5) and \overline{T}_λ to obtain the final result,

$$\overline{\langle e^{yq} \rangle} = \cosh^2 \left(\frac{y}{V} \right) + \overline{x} \sinh^2 \left(\frac{y}{V} \right) \quad (\text{B.7})$$

From here we can compute the bare moments of the overlap,

$$\overline{\langle q \rangle} = \frac{\partial \overline{\langle e^{yq} \rangle}}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} \overline{\langle q^2 \rangle} &= \frac{\partial^2 \overline{\langle e^{yq} \rangle}}{\partial^2 y} \Big|_{y=0} = \\ &= \frac{1}{2V^2} \left[2V \frac{1+\overline{x}}{1-\overline{x}} + 1 - \left(\frac{1+\overline{x}}{1-\overline{x}} \right)^2 + \overline{x}^{V-1} \left(\frac{2\overline{x}}{1-\overline{x}} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

This last result could be compared with the result obtained by computing it directly:

$$\begin{aligned} \overline{\langle q^2 \rangle} &= \frac{\sum \left(\frac{\sum \sigma_i \tau_i}{V} \right)^2 e^{\beta(H[\sigma] + H[\tau])}}{\mathcal{Z}^2} \\ &= \frac{1}{V} \left(1 + 2 \sum_{p=1, V-1} \frac{(V-p)}{V} \overline{x}^p \right) = \frac{1}{V} \left(\frac{1+\overline{x}}{1-\overline{x}} - 2 \frac{\overline{x}(\overline{x}^V - 1)}{V(1-\overline{x})^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Case $m = 2$

In this case we have a 16×16 matrix defined in each point, this is $t_i \otimes t_i$. The matrix which we obtain after having averaged over the disorder is:

$$\overline{V_i \otimes V_i} = \overline{\begin{pmatrix} a & b & b & c \\ b & d & e & b \\ b & e & d & b \\ c & b & b & a \end{pmatrix}} \otimes \overline{\begin{pmatrix} a & b & b & c \\ b & d & e & b \\ b & e & d & b \\ c & b & b & a \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} A & M & M & B \\ M & C & D & M \\ M & D & C & M \\ B & M & M & A \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

where

$$\begin{aligned} a &= e^{y/n} (1+x_i)^2 & b &= (1-x_i^2) & c &= e^{y/n} (1-x_i)^2 \\ d &= e^{-y/n} (1+x_i)^2 & e &= e^{-y/n} (1-x_i)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Where capital letters stand for 4×4 matrices. However we have already put forward that the reduction from $\{\sigma^\alpha, \tau^\alpha\} \rightarrow \{S^\alpha\}$ can be done. Hence the final averaged matrix is a 4×4 matrix which reads,

$$T(S_i^1 S_i^2; S_{i+1}^1, S_{i+1}^2) = \overline{\begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix}} \otimes \overline{\begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & \delta \\ \beta & \gamma & \delta & \epsilon \\ \beta & \delta & \gamma & \epsilon \\ \delta & \epsilon & \epsilon & \phi \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

where

$$\alpha = e^{2y/n} \overline{(1 + x_i^2)^2} \quad (\text{B.14})$$

$$\beta = e^{y/n} \overline{(1 - x_i^4)} \quad (\text{B.15})$$

$$\delta = \overline{(1 - x_i^2)^2} \quad (\text{B.16})$$

$$\gamma = \overline{(1 + x_i^2)^2} \quad (\text{B.17})$$

$$\epsilon = e^{-y/n} \overline{(1 - x_i^4)} \quad (\text{B.18})$$

$$\phi = e^{-2y/n} \overline{(1 + x_i^2)^2} . \quad (\text{B.19})$$

In order to obtain $\overline{(q^2)^2}$ we have to follow the general procedure outlined in section 3.1. Calculations are very lengthy and have been performed with Mathematica. The final results are very intricate expressions from which very little can be obtained so that here we content ourselves with offering the limiting behaviours given in equations (3.59) and (3.59) for low and high temperature respectively.

Appendix C

The Transfer Matrix Method: two-dimensional Ising spin glass

In the previous appendix we have seen how to construct a transfer matrix in a one-dimensional system. In a two-dimensional system (or in higher dimensions) the idea is very similar. Nevertheless, calculations are more involved and the problem cannot be solved analytically. In this appendix we shall focus in the numerical advantages of this method and in the computation of ground states.

Consider a lattice system consisting of V microscopic variables s_1, \dots, s_V defined at each site of the lattice which are described by the Hamiltonian, $\mathcal{H}(\{s\})$. In order to construct the transfer matrix, the first step is to group the sites of the lattice into a one-dimensional array of M slices. The direction from one slice to the other is the *transfer matrix direction*. The slices are to be chosen in such a way that the global *reduced* Hamiltonian (in units of $k_B T$) can be expressed as the sum of two-slice Hamiltonians, $h(\{\sigma_i\}, \{\sigma_{i+1}\})$, where $\{\sigma_i\}$ stands for the configuration of slice $i = 1, \dots, M$ (see Fig. C.1),

$$\mathcal{H}(s_1, \dots, s_V) = \sum_{i=1}^M h(\{\sigma_i\}, \{\sigma_{i+1}\}) \quad (\text{C.1})$$

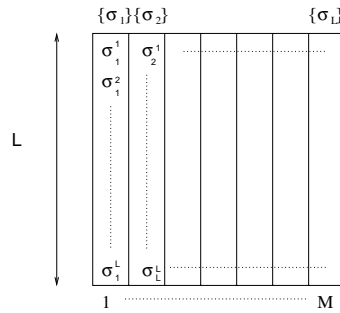


Figure C.1. Schematic picture of how a two-dimensional lattice system is divided into slices.

The transfer matrix is defined by each of its elements,

$$T(\sigma, \sigma') = \exp[h(\sigma, \sigma')] \quad . \quad (\text{C.2})$$

We will assume that the transfer matrix has a set of left and right eigenvectors ψ_0, ψ_1, \dots and $\bar{\psi}_0, \bar{\psi}_1, \dots$ with components $\psi_0(\sigma), \psi_1(\sigma), \dots$ and $\bar{\psi}_0(\sigma), \bar{\psi}_1(\sigma), \dots$ and eigenvalues $\lambda_0 > |\lambda_1| \geq \dots$. Where, in virtue of the Perron-Frobenius theorem the dominant eigenvalue, λ_0 , is positive and non-degenerate [Gan74].

For simplicity let us consider first the two-dimensional pure Ising model. Its Hamiltonian reads, $\mathcal{H} = K \sum S_i S_j$ where the sum is extended over nearest-neighbour couples. Each slice consists of a column of the lattice, so that the transfer matrix is the following slice-to-slice matrix,

$$T(\sigma, \sigma') = \exp \left[\frac{K}{2} \sum_{j=1}^L 2\sigma_j \sigma'_j + \sigma_j \sigma_{j+1} + \sigma'_j \sigma'_{j+1} \right] \quad . \quad (\text{C.3})$$

Note the transfer matrix is the same for every pair of slices (columns). Here, we consider that the lattice size in the perpendicular direction to the transfer direction is L and has periodic boundary conditions. But that the transfer size of the system is M and can be different from L , the size of the system being $L \times M$.

The partition function of a system of transfer size r can be obtained in the following way,

$$\mathcal{Z}_r(\sigma_r) = \sum_{\sigma_{r-1}} T(\sigma_r, \sigma_{r-1}) \mathcal{Z}_{r-1}(\sigma_{r-1}) \quad . \quad (\text{C.4})$$

therefore the partition function can be obtained from iterating successively the scheme above from the partition function of the first left column $\mathcal{Z}_1(\sigma_0)$ for fixed boundary conditions. Expressing \mathcal{Z}_1 in terms of the set of eigenfunctions of $T(\sigma, \sigma')$, we obtain $\mathcal{Z}_1(\sigma) = \sum_i z_i \psi_i(\sigma)$. Therefore, since $T(\sigma, \sigma') \psi_i(\sigma') = \lambda_i \psi_i(\sigma)$, $\mathcal{Z}_r(\sigma)$ in terms of the eigenfunctions ψ_i reads,

$$\mathcal{Z}_r(\sigma_r) = \lambda_0^r \left[z_0 \psi_0(\sigma_r) + \sum_{i \geq 1} z_i e^{-\kappa_i r} \psi_i(\sigma_r) \right] ; \quad \kappa_i = \frac{\ln \lambda_0}{\ln \lambda_i} \quad (\text{C.5})$$

where we have introduced the inverse correlation lengths (that can be also complex) κ_i . In the large- r ($/M$) limit the partition function is dominated by the largest eigenvalue, λ_0 . Therefore, the free-energy is readily obtained as, $F = -\ln \lambda_0$. Any other quantity can be obtained by introducing a field to the Hamiltonian (C.1) and deriving the free-energy with respect to the field [Nig90]¹.

Now let us focus on the two-dimensional Ising spin glass whose Hamiltonian reads $\mathcal{H} = \sum_{\langle ij \rangle} K_{ij} S_i S_j$. In this system and in random systems in general, the transfer matrix is different for every pair of columns. Therefore λ_0 is different for every transfer matrix. Still one can take advantage of this method and compute the free-energy in the large- M limit as follows,

$$\bar{F} = -\ln \bar{\lambda}_0 ; \quad \bar{\lambda}_0 = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{|T_1 T_2 \dots T_M \psi|}{|\psi|} \right)^{1/M} \quad (\text{C.6})$$

where $|\dots|$ is any norm defined in vector phase space and ψ is any vector. It can be calculated with any desired accuracy from any realisation of the quenched disorder [Nig90].

Nevertheless, for finite-size systems, the usual procedure is to evaluate the partition function recursively from (C.4). Thus, we can compute the average free-energy over many different samples of the quenched disorder so that any thermodynamical observable can be obtained through finite derivatives of the free-energy.

¹This is exactly the procedure used to compute numerically the averages of the moments of the overlap to compute G and A at finite temperature in Sec. 3.2 in Chap. 3

The advantage of this method compared to Monte Carlo simulations is that one avoids thermalisation problems present in the latter. However, it is limited to rather small systems because the computational times and storage needs increase exponentially with the length, L , of the system.

Computation of the Ground State

The Transfer Matrix method is also useful to compute the ground state energy as follows [MB80]. Take the first column of the lattice and compute the intra-column energy of every possible configuration in that column. Select the n (≈ 100) states with lowest energy. Then add a column in each possible configuration and, again, store the n states with lowest energy. Repeat this last step until reaching the final size of the system. Compare with the zero temperature free-energy to check that you have found the real ground state.

This method allows to compute ground states and first excited states much faster than enumerating all the possible states. Moreover one is able not only to compute the energies but also to keep track of the best configurations (with a little more computational effort) and compute the statistics of the overlap between the first excited state and the ground state.

Appendix D

Computation of the Partition Function of a Directed Ploymer with Bethe wave functions.

Our aim is to show how the partition function can be evaluated when we consider that the spectrum of eigenfunctions is given by $\{|\psi_\mu\rangle\}$ and assuming that replicas have both ends fixed: one at $(0, 0)$ and the other at x_A in the case of subset A and x_B in the case of subset B. The disorder averaged partition function is given by,

$$\overline{Z_{\text{RS}}(0, 0|x_A, x_B)} = \sum_{\mu} e^{-L E_{\mu}} \langle \{x_{\{A, \alpha \in A\}}, x_{\{B, \alpha \in B\}}\} | \psi_{\mu} \rangle \langle \psi_{\mu} | \{0\} \rangle \quad (\text{D.1})$$

where E_{μ} are the eigen values associated to the eigen functions $|\psi_{\mu}\rangle$.

■ RS

In the RS case we the 2 n replicas form a single bounded cluster with common center of mass motion. Therefore we consider the following set of eigen functions that we label with the index CM moment k ,

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{RS}}(h, k : \{x_{G, \alpha}\}) \\ \sim \Psi_{\text{RS}}(\{x_{G, \alpha}\}) \exp \left[\frac{h}{k_B T} \left(\sum_{\alpha} x_{A, \alpha} - \sum_{\alpha} x_{B, \alpha} \right) \right] \exp \left(i k \sum_{G, \alpha} x_{G, \alpha} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

where Ψ_{RS} is the Bethe wave function introduced in (5.33). The 2nd factor arises from the uniform tilt perturbation: h to subset A and $-h$ to subset B. The last factor is the plane wave of wave vector k which accounts for the free CM motion. Here the ground state is included as the $k = 0$ case. One can easily find the eigenvalues to be,

$$E_{\text{RS}}(h, k) = E_0 + \frac{n h^2}{\kappa k_B T} + n \frac{k_B T}{\kappa} k^2. \quad (\text{D.3})$$

The 1st term is the original ground-state energy E_g of the unperturbed system given in (5.34), the 2nd term is due to the perturbation and the last term is due to the CM motion.

In order to compute the partition function it is useful to consider the Gaussian transformation introduced by Parisi in [Par90] to represent Bethe's wave function,

$$\Psi_{\text{RS}}(\{x_{G, \alpha}\}) \sim e^{-\lambda \sum_{((G, \alpha), (G', \beta))} |x_{\alpha, G} - x_{\beta, G'}|} \quad (\text{D.4})$$

$$= \int \mathcal{D}\mathcal{V} \exp \left[- \int dx \frac{1}{4\lambda} \left(\frac{d\mathcal{V}}{dx} \right)^2 \right] \exp \left(\sum_{G,\alpha} \mathcal{V}(x_{G,\alpha}) \right).$$

where the normalisation condition reads $\int \mathcal{D}\mathcal{V} \exp \left[- \int dx \frac{1}{4\lambda} \left(\frac{d\mathcal{V}}{dx} \right)^2 \right] = 1$.

Then the partition function (D.1) reads,

$$\begin{aligned} \overline{Z_{\text{RS}}(0, 0|x_A, x_B)} &\sim e^{-(E_0 + n\hbar^2/(2\kappa k_B T))L} \int \mathcal{D}\mathcal{V} \exp \left[- \int dx \frac{1}{4\lambda} \left(\frac{d\mathcal{V}}{dx} \right)^2 \right] \\ &\times \exp \left[n \left(\mathcal{V}(x_A) + \mathcal{V}(x_B) + \frac{\hbar}{k_B T} (x_A + x_B) \right) \right] \\ &\times \int dk \sqrt{Ln \frac{k_B T}{\kappa \pi}} \exp \left(-Ln \frac{k_B T}{\kappa} k^2 + ik(n x_A + n x_B) \right) \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Integrating over the center of mass moments the contribution which depends on the end point coordinates reads,

$$\exp \left[-\frac{\kappa n}{k_B L T} (x_A + x_B)^2 + \mathcal{V}_A + \mathcal{V}_B + \frac{\hbar}{k_B T} (x_A + x_B) \right]. \quad (\text{D.6})$$

Here, by introducing the adequate scaling variables,

$$x = L^{2/3} y \quad \mathcal{V} = -L^{1/3} \tilde{\mathcal{V}} \quad \hbar = L^{-1/3} \tilde{\hbar}, \quad (\text{D.7})$$

one can separate the dependence on L and express the partition function in terms of an adimensional effective Hamiltonian as follows,

$$\mathcal{Z} \sim e^{-(E_0 + n\hbar^2/(\kappa k_B T))L} \overline{[\exp(-nL^{1/3} E_{\text{RS-Sinai}}(T, \hbar, \mathcal{V}; y_A, y_B))]}_{\tilde{\mathcal{V}}}. \quad (\text{D.8})$$

Where $\overline{[\cdots]}_{\tilde{\mathcal{V}}}$ means the average over the effective potential $\tilde{\mathcal{V}}$,

$$\overline{[\cdots]}_{\tilde{\mathcal{V}}} = \int \mathcal{D}\tilde{\mathcal{V}} e^{-\int dy (1/4\lambda) (\frac{d\tilde{\mathcal{V}}}{dy})^2} \cdots \quad (\text{D.9})$$

and $E_{\text{RS-Sinai}}(T, \hbar, y_A, y_B)$ is the effective adimensional Hamiltonian,

$$\begin{aligned} E_{\text{RS-Sinai}}(T, \hbar, \mathcal{V}; y_A, y_B) &= \frac{\kappa}{2k_B T} \frac{(y_A + y_B)^2}{2} \\ &+ \tilde{\mathcal{V}}(y_A) + \tilde{\mathcal{V}}(y_B) - \frac{\tilde{\hbar}}{k_B T} y_A + \frac{\tilde{\hbar}}{k_B T} y_B \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

■ RSB

The partition function (D.1) is evaluated by integrating out the spectrum of excited states considering two separate bounded clusters for groups A and B, so that the set of eigen functions read (5.68),

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{RSB}}(\hbar, k_A, k_B : \{x_{G,\alpha}\}) &\sim \Psi_{\text{RS}}(\{x_{A,\alpha}\}) \Psi_{\text{RS}}(\{x_{B,\alpha}\}) \\ &\times \exp \left(ik_A \sum_{\alpha} x_{A,\alpha} \right) \exp \left(ik_B \sum_{\alpha} x_{B,\alpha} \right). \end{aligned}$$

The first two factors are due to the original wave function of the RSB state (5.36) which consists in two clusters of bound states. As we noted in 2.2.3, it remains as an eigenstate even under the uniform tilt field since it is assumed that these clusters have zero overlap. Moreover, this absence of overlap also

allows independent CM motions of A and B subsets. The later two factors account for such separate CM motions. The eigenvalues are the following,

$$E_{\text{RSB}}(h, k_{\text{A/B}}) = E_{\text{RSB}} + n \frac{h}{\kappa} (ik_{\text{A}}) + n \frac{h}{\kappa} (ik_{\text{B}}) + n \frac{k_{\text{B}}T}{2\kappa} k_{\text{A}}^2 + n \frac{k_{\text{B}}T}{2\kappa} k_{\text{B}}^2. \quad (\text{D.11})$$

The 1st term is the original ground-state energy E_{RSB} of the unperturbed RSB state given in (5.37). The 2nd and 3rd terms come from the perturbation. The last two terms are due to the separate CM motions. The procedure is analogous to that explained above for the RS case. By introducing the Gaussian representation for each of the Bethe functions $\Psi_{\text{RS}}(\{x_{\text{A/B},\alpha}\})$ (D.4) we can express the partition function (D.1) as follows,

$$\begin{aligned} \overline{Z_{\text{RSB}}(0, 0|x_{\text{A}}, x_{\text{B}})} &\sim e^{-E_0 L} \\ &\int \mathcal{D}V_{\text{A}} \exp \left[- \int dx \frac{1}{4\lambda} \left(\frac{dV_{\text{A}}}{dx} \right)^2 \right] \int \mathcal{D}V_{\text{B}} \exp \left[- \int dx \frac{1}{4\lambda} \left(\frac{dV_{\text{B}}}{dx} \right)^2 \right] \\ &\times \exp [nV_{\text{A}}(x_{\text{A}}) + nV_{\text{B}}(x_{\text{B}})] \\ &\times \int dk_{\text{A}} \sqrt{Ln \frac{nk_{\text{B}}T}{2\kappa\pi}} \int dk_{\text{B}} \sqrt{Ln \frac{k_{\text{B}}T}{2\kappa\pi}} \exp \left[-Ln \frac{2k_{\text{B}}T}{\kappa} k_{\text{A}}^2 \right. \\ &\quad \left. - Ln \frac{2k_{\text{B}}T}{\kappa} k_{\text{B}}^2 - Ln \frac{h}{\kappa} (ik_{\text{A}}) + Ln \frac{h}{\kappa} (ik_{\text{B}}) + ik(n x_{\text{A}} + n x_{\text{B}}) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Again by integrating out the dependence on the moments $k_{\text{A/B}}$ and introducing the scaling variables defined in D.7 we get for the partition function an expression equivalent to (D.8) in terms of an effective adimensional Hamiltonian,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &\sim e^{-(E_0 + (2n)h^2/(2\kappa k_{\text{B}}T))L} \left[\overline{\exp \left(-nL^{1/3} E_{\text{RSB-Sinai}}(T, h, \tilde{V}_{\text{A}}, \tilde{V}_{\text{B}}; y_{\text{A}}, y_{\text{B}}) \right)} \right]_{\tilde{V}_{\text{A}}, \tilde{V}_{\text{B}}} \\ E_{\text{RSB-Sinai}}(T, h, \tilde{V}_{\text{A}}, \tilde{V}_{\text{B}}; y_{\text{A}}, y_{\text{B}}) &= \frac{\kappa}{2k_{\text{B}}T} y_{\text{A}}^2 + \tilde{V}_{\text{A}}(y_{\text{A}}) - \frac{\tilde{h}}{k_{\text{B}}T} y_{\text{A}} \\ &\quad + \frac{\kappa}{2k_{\text{B}}T} y_{\text{B}}^2 + \tilde{V}_{\text{B}}(y_{\text{B}}) + \frac{\tilde{h}}{k_{\text{B}}T} y_{\text{B}}. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

where the averages $[\cdot \cdot \cdot]_{\tilde{V}_{\text{A/B}}}$ have been defined in eq. (D.9).

Appendix E

How to compute C_F in the Random Energy Model

The object of this appendix is to show in detail how free-energy and its fluctuations can be computed in the low temperature phase of the REM in which different energy levels ϵ_i are uncorrelated and have an exponential distribution,

$$P(\epsilon) = \frac{1}{T_f} e^{-|\epsilon|/T_f} \quad \epsilon \in (-\infty, 0] \quad . \quad (\text{E.1})$$

The free-energy of the model $\overline{f} = \overline{-T \ln Z}$ can be computed using Derrida's representation of the logarithm [Der81] of the partition function $Z = \sum_i^N \exp -\epsilon_i/T$,

$$\ln Z = \lim_{b \rightarrow 0^+} \int_0^\infty dt \frac{1}{t^{1-b}} (e^{-t} - e^{-tZ}) \quad (\text{E.2})$$

where we have used the prescription of taking the limit $b \rightarrow 0$ at the end in order to avoid divergences at intermediate stages.

The first term is trivial and yields,

$$\int_0^\infty dt \frac{1}{t^{1-b}} e^{-t} = \Gamma(b) \quad (\text{E.3})$$

Now we need to compute the average of $\exp -tZ$ over the distribution (2.15). Here it is useful to define the following variables $z_i = \exp \frac{-\epsilon_i}{T}$. These will be also random non correlated variables distributed according to the following power law,

$$P(z) = \mu \frac{1}{z^{1+\mu}} \quad \mu = \frac{T}{T_f} \quad . \quad (\text{E.4})$$

Thus we have that the average of $\exp -tZ$ is the product of N different terms so that we get the following expression,

$$\int_0^\infty dt \frac{1}{t^{1-b}} e^{-tZ} = \int_0^\infty dt \frac{1}{t^{1-b}} \left(\mu \int_1^\infty \frac{1}{z^{1+\mu}} e^{-tz} \right)^N \quad (\text{E.5})$$

Here we have to note that for large N the contribution will come from the vicinity of $t = 0$ thus we can make the following transformation to the term inside the parenthesis,

$$\left(\mu \int_1^\infty \frac{1}{z^{1+\mu}} e^{-tz} \right)^N =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \mu \int_1^\infty \frac{1}{z^{1+\mu}} (e^{-tz} - 1) dz\right)^N = \left(1 + \mu t^\mu \int_1^\infty \frac{1}{u^{1+\mu}} (e^{-u} - 1) du\right)^N \\
&\approx \exp -t^\mu C_\mu N \quad C_\mu = \int_0^\infty \frac{1}{u^{1+\mu}} (e^{-u} - 1) du = \Gamma(1 - \mu) \quad .
\end{aligned} \tag{E.6}$$

So that the final expression for term (E.5) is,

$$\int_0^\infty dt \frac{1}{t^{1-b}} e^{-tZ} = \frac{\Gamma(\frac{b}{\mu})}{\mu (N\Gamma(1 - \mu))^{b/\mu}} \quad . \tag{E.7}$$

Thus adding contributions (E.3) and (E.6) this yields for the average free-energy the following result,

$$\overline{F} = T_f (-\ln N - \gamma(1 - \mu) - \ln \Gamma(1 - \mu)) \tag{E.8}$$

where γ is Euler's constant. We note that here that the first contribution comes from the fact that the minimum energy that can be drawn from an exponential distribution is $-T_f \ln N$, and thus corresponds to the energy of the ground-state. Fluctuations around the minimum which will contribute to C_F will therefore be of order 1.

The computation of the cross terms is more complicated,

$$\overline{\ln \mathcal{Z}(T_1) \ln \mathcal{Z}(T_2)} = \lim_{b \rightarrow 0^+} \int_0^\infty dq \int_0^\infty dt \frac{1}{(qt)^{1-b}} (e^{-t} - e^{-tZ}) (e^{-q} - e^{-qZ}) \quad . \tag{E.9}$$

The procedure is every similar at an intermediate step one obtains ,

$$\begin{aligned}
\overline{\ln \mathcal{Z}(T_1) \ln \mathcal{Z}(T_2)} &= \Gamma^2(b) - \Gamma(b) \left[\frac{\Gamma(b/\mu_1)}{M^{b/\mu_1} \mu_1 \Gamma^{b/\mu_1}(1 - \mu_1)} + \frac{\Gamma(b/\mu_2)}{M^{b/\mu_2} \mu_2 \Gamma^{b/\mu_2}(1 - \mu_2)} \right] \\
&+ \Gamma(\beta b) \left[\frac{1 - b^2 \beta \mathcal{F}(\mu_1, \alpha)}{\Gamma^{\beta b}(1 - \mu_1)} + \alpha \frac{1 - b^2 \beta \mathcal{F}(\mu_2, \alpha)}{\Gamma^{\beta b}(1 - \mu_2)} \right]
\end{aligned} \tag{E.10}$$

where $\alpha = 1 + \epsilon$, $\beta = (1 + \alpha)/\mu_1$ and

$$\mathcal{F}(\mu, \alpha) = \int_0^1 \frac{dv}{v} \log \left[1 + \frac{\mu}{\Gamma(1 - \mu)} \int_0^\infty du \frac{\exp[-u] - \exp[-u^\alpha v]}{u^{1+\mu}} \right] \quad . \tag{E.11}$$

By making the expansion for small ϵ up to $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ we obtain for the susceptibility κ_F defined in (5.11) the following expression,

$$\begin{aligned}
\kappa_F(\mu) &= \frac{1}{(2\pi^2(\mu - 1))} \left\{ 6(1 - 2\ell_2 + 2\ell_2\psi'[1 - \mu]\mu^5) \right. \\
&- 12\mu^3(-1 + \ell_2\psi'[1 - \mu])\mu^2(\pi^2 - 2(-9 + 3\psi'[1 - \mu] + 6\psi[-\mu])) \\
&- 3\psi^2[-\mu] - 12\ell_2 - 18\ell_2\psi[-\mu] + 6\ell_2\psi^2[-\mu] + 9\ell_2^2 + 2\ell_2^3 - 6\ell_2\psi[-\mu] \\
&- 12\mu(1 - \ell_2(3 + \ell_2) + (-1 + 2\ell_2)\psi[-\mu]) + 2\mu^4 \times \\
&\left. \times (3\psi'[1 - \mu] - 6\ell_2(1 + \ell_2)\psi[-\mu] + \ell_2^2(3 + 2\ell_2) + 3(-1 + 2\ell_2)\psi^2[-\mu]) \right\} \quad ,
\end{aligned} \tag{E.12}$$

where $\ell = \ln 2$ and $\psi[x]$ is the derivative of the Gamma function.

Appendix F

Calculation of the Entropy Fluctuations in the deepest well of the Sinai Model.

In this appendix we compute the average energy fluctuations of the Sinai model in the large L limit. As we have already said in section 4.1.1 these entropy fluctuations are a constant in this limit. For this computation we only need to consider the contribution to the partition function arising from the deepest minima. Monthus and Le Doussal in [MD02] compute the probability distribution of the partition function of the deepest well considering that the origin in energies is at the bottom of the potential. They compute $P(\mathcal{Z})$ obtaining that the Laplace transform is

$$\int_0^\infty d\mathcal{Z} e^{-t\mathcal{Z}} P(\mathcal{Z}) = \frac{1}{I_0^2(a\sqrt{t})} \quad a = \frac{2}{\beta\sqrt{\sigma}} \quad , \quad (\text{F.1})$$

where $\beta = 1/T$ and σ is the variance of the random force. This result implies that we can work in terms of a dimensionless partition function $z = \frac{\mathcal{Z}}{a^2}$ to obtain,

$$\int_0^\infty dz e^{-tz} p(z) = \frac{1}{I_0^2(\sqrt{t})} \quad . \quad (\text{F.2})$$

Since the energy of the absolute minimum is zero, the entropy fluctuations can be directly computed as,

$$\overline{S(T)^2} - \left(\overline{S(T)}\right)^2 = \overline{\ln^2 \mathcal{Z}} - \overline{\ln \mathcal{Z}}^2 \quad . \quad (\text{F.3})$$

Now in terms of the dimensionless partition function we have that $\ln \mathcal{Z} = \ln z + \ln a^2$, thus when computing fluctuations of averages over z terms which depend on a (and thus on T) cancel to yield,

$$\overline{S(T)^2} - \left(\overline{S(T)}\right)^2 = \overline{\ln^2 z} - \overline{\ln z}^2 = \int_0^\infty dz p(z) (\ln z)^2 - \left(\int_0^\infty dz p(z) \ln z\right)^2 \quad , \quad (\text{F.4})$$

which is a constant as we expected. This constant can be evaluated by computing the averages of $\ln z$ and $\ln^2 z$. The starting point of the calculation is Derrida's integral representation of the logarithm,

$$\ln \mathcal{Z} = \lim_{q \rightarrow 0} \int_q^\infty dt \frac{1}{t} (e^{-t} - e^{-t\mathcal{Z}}) \quad , \quad (\text{F.5})$$

When we perform the average of e^{-tz} we obtain the Laplace Transform given in (F.2) thus

$$\overline{\ln z} = \lim_{q \rightarrow 0} \int_q^\infty dt \frac{1}{t} \left(\frac{1}{I_0^2(\sqrt{t})} - e^{-t} \right). \quad (\text{F.6})$$

This integral can be split into two parts, the exponential integral

$$\int_q^\infty dt \frac{1}{t} e^{-t} = -\gamma - \ln q + q + \frac{q^2}{2} + \dots \quad \lim_{q \rightarrow 0} q \rightarrow 0, \quad (\text{F.7})$$

where γ is the Euler constant. And the part with the Bessel Function,

$$\begin{aligned} \int_q^\infty dt \frac{1}{t} \frac{1}{I_0^2(\sqrt{t})} &= 2 \int_{\sqrt{q}}^\infty dt \frac{1}{t} \frac{1}{I_0^2(t)} = 2 \int_{\sqrt{q}}^\infty dt \left(-\frac{d}{dt} \frac{K_0(t)}{I_0(t)} \right) = 2 \frac{K_0(\sqrt{q})}{I_0(\sqrt{q})} \\ &= -\ln q + 2 \ln 2 - 2\gamma + (\psi(2) - 1) \frac{q}{8} + \dots \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

where we have used the Wronskian property of the Bessel functions [AS72],

$$-\frac{1}{t} = K'_\nu(t) I_\nu(t) - K_\nu(t) I'_\nu(t). \quad (\text{F.9})$$

Adding this two contributions we obtain that the average entropy reads,

$$\overline{S(T)} = \overline{\ln Z} = -2 \ln a - 2 \ln 2 + \gamma. \quad (\text{F.10})$$

To compute the average $\ln^2 z$ we have to evaluate the following integral,

$$\overline{\ln^2 z} = \lim_{q \rightarrow 0, p \rightarrow 0} \int_q^\infty dt \int_p^\infty dt' \frac{1}{t t'} \left(e^{-t-t'} - \frac{e^{-t'}}{I_0^2(\sqrt{t})} - \frac{e^{-t}}{I_0^2(\sqrt{t'})} + \frac{1}{I_0^2(\sqrt{t+t'})} \right). \quad (\text{F.11})$$

The contribution arising from the first three terms in the integral can be easily evaluated from expressions (F.6) and (F.7) to obtain:

$$\begin{aligned} \int_q^\infty dt \int_p^\infty dt' \frac{e^{-t-t'}}{t t'} &= \gamma^2 + \gamma \ln qp + \ln q \ln p + \mathcal{O}(q, p) \\ \int_q^\infty dt \int_p^\infty dt' \frac{e^{-t}}{t t'} \frac{1}{I_0^2(\sqrt{t'})} &= (\gamma + \ln q)(2\gamma - 2 \ln 2 + \ln p) \\ \int_q^\infty dt \int_p^\infty dt' \frac{e^{-t'}}{t t'} \frac{1}{I_0^2(\sqrt{t})} &= (\gamma + \ln p)(2\gamma - 2 \ln 2 + \ln q). \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

The last term is somewhat more tricky and can be evaluated as follows,

$$\int_q^\infty dt \int_p^\infty dt' \frac{1}{I_0^2(\sqrt{t+t'})} = 2 \int_q^\infty dt \frac{1}{t} \frac{K_0(\sqrt{t+p})}{I_0(\sqrt{t+p})} + 2 \int_p^\infty dt' \frac{1}{t'} \frac{K_0(\sqrt{t'+q})}{I_0(\sqrt{t'+q})}. \quad (\text{F.13})$$

In the limit $p \rightarrow 0$ the integral can be Taylor expanded yielding,

$$\int_q^\infty dt \frac{1}{t} \frac{K_0(\sqrt{t+p})}{I_0(\sqrt{t+p})} = \int_q^\infty dt \frac{1}{t} \frac{K_0(\sqrt{t})}{I_0(\sqrt{t})} + \mathcal{O}(p) \quad (\text{F.14})$$

where the terms of order p do not contribute when we set p to 0. Hence we can evaluate expression (F.13) at $p = 0$ to obtain,

$$\int_q^\infty dt \frac{1}{t} \frac{K_0(\sqrt{t})}{I_0(\sqrt{t})} = \frac{1}{2} \ln^2 q - 2 \ln 2 \ln q + 2 \gamma \ln q + 2 \zeta \quad \zeta = 0.2415... \quad (\text{F.15})$$

Adding all the contributions and taking the double limit $q \rightarrow 0$ and $p \rightarrow 0$ we obtain the following result for $\overline{\ln^2 z}$,

$$\overline{\ln^2 z} = 4 \zeta - 3 \gamma + 4 \gamma \ln 2, \quad (\text{F.16})$$

which yields for entropy fluctuations,

$$\overline{S^2} - \overline{S}^2 = 4 \left(\zeta - (\gamma - \ln 2)^2 \right) = 0.912784... \quad (\text{F.17})$$

Appendix G

High temperature expansion in the Sinai model: the distance shift

We want to compute the high temperature behavior of the average distance shift between systems at two different temperatures $d_{1,2}$ as defined in eq.(5.32),

$$\overline{(\langle x \rangle_1 - \langle x \rangle_2)^2} \quad (\text{G.1})$$

In the high temperature limit $\beta \rightarrow 0$ a simple Taylor expansion yields,

$$\langle x \rangle = \frac{1}{L} \left(\sum_i x_i - \beta \left(\sum_i x_i V_i - \sum_i x_i \sum \frac{V_i}{L} \right) \right) \quad (\text{G.2})$$

where V_i is the random potential at position $x_i = i/L$.
Therefore for (G.1) we obtain,

$$\begin{aligned} \overline{(\langle x \rangle_1 - \langle x \rangle_2)^2} &= \Delta \beta^2 \frac{1}{L^2} \overline{\left(\sum_i x_i V_i - \sum_i x_i \sum \frac{V_i}{L} \right)^2} \\ &= (\Delta \beta)^2 \frac{\sigma^2}{120} \frac{(L^2 - 1)(L^2 + 10L + 11)}{L^3}, \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

where in the last equality we have used the relation $\overline{V_i V_j} = \sigma^2 \min\{i, j\}$ which holds for Gaussian distributed forces with zero mean. For large L we recover expression (5.38),

$$\overline{(\langle x \rangle_1 - \langle x \rangle_2)^2} = \frac{\sigma^2}{120} (\Delta \beta)^2 L \quad (\text{G.4})$$

Resum del contingut de la Tesi

1. Introducció

1.1 Generalitats

L'anàlisi dels sòlids cristal·lins va jugar un paper molt important ens els inicis de la "Física de la Matèria Condensada" (Estat Sòlid i Mecànica Estadística) [CL95, AM76]. Tot i així, alteracions d'aquest ordre "perfecte" es troben arreu en la natura. Per moltes aplicacions pràctiques utilitzem materials que estan feble o fortament desordenats. Un exemple molt prominent són els semiconductors dopats utilitzats per construir dispositius microelectrònics. El desordre feble és present en molts sòlids en forma de defectes, vacants o dislocacions de la xarxa cristal·lina. Però, es diu que el desordre és fort quan es trenca l'ordre a llarg abast i la periodicitat translacional, encara que es mantingui l'ordre local. Aquest és el cas dels sòlids amorfs com els vidres, que no presenten cap mena d'ordre a llarg abast. A més a més, el desordre pot donar-se de moltes altres maneres; a part de l'estructural, podem parlar de desordre magnètic, orientacional (en materials dipolars), químic i vibracional. Per aquest motiu, la física del desordre és interessant des del punt de vista de la física fonamental.

Els sistemes desordenats presenten una immensa varietat de fenòmens complexos, tant estàtics com dinàmics. Un dels més interessants, tot i que poc entès, és aquell en el que l'aleatorietat i la competició d'interaccions indueix la frustració de l'estat fonamental, i com a resultat una alta degeneració d'estats de baixa energia. L'exemple canònic és el vidre d'espí. El vidre d'espí és l'anàleg magnètic del vidre. Un vidre és un sistema amorf que té una transició dinàmica d'una fase líquida a una fase metastable semblant a la sòlida on la dinàmica és molt lenta. En els vidres d'espí, aquesta transició s'identifica amb una vertadera transició termodinàmica des d'una fase paramagnètica a una fase "ordenada" anomenada vidre d'espí.

Tot i que un vidre d'espí és un tros de material inservible des del punt de vista tecnològic, presenta una física fascinant. De fet, l'estudi dels vidres d'espí és interessant no només perquè són sistemes desordenats, sinó perquè per la simplicitat de la seva modelització, els vidres d'espí són el paradigma dels sistemes complexos. Per aquest motiu

el seu estudi pot ajudar a entendre el comportament d'altres sistemes desordenats més complicats com es gels, els polímers o els superconductors ceràmics [You98]. En aquest punt és convenient definir complexitat. En Física Computacional un problema complex és aquell en què el temps que es triga en solucionar-lo és exponencial en el nombre de variables [Pap94]. La noció de sistema complex s'ha expès a molts altres camps i inclou una àmplia gamma de sistemes, des de sòlids fins a organismes vius o col·lectivitats socials. Pel seu gran potencial, en els últims anys l'estudi d'aquesta mena de sistemes ha experimentat un creixement notable, i en particular en el camp de la Física Estadística, des d'on s'intenta entendre el comportament complex reduint la descripció del sistema a unes poques variables.

Històricament, els físics experimentals i teòrics treballant en el camp dels vidres d'espí han tingut diferents interessos. Malgrat que des del començament va quedar clar que un vidre d'espí és un sistema fora d'equilibri amb temps d'equilibrament molt llargs a baixes temperatures, els teòrics van dedicar molt de temps a l'estudi de les propietats d'equilibri dels models de camp mig. De fet, deixant a banda la rellevància d'entendre els sistemes reals, el tractament teòric del problema va requerir el desenvolupament de noves tècniques tant analítiques (Teoria de Rèpliques i formalismes dinàmics [MPV87]) com numèriques (algorismes de Termalització en Paral·lel o Gran Canònic i tècniques d'Optimització en General [MPRL98b]). Aquests avenços han donat lloc a una nova fenomenologia, agrupada sota el nom de *comportament vitri*, de la que camps molt diversos n'han tret profit com les xarxes neurals, la física computacional o sistemes electrònics desordenats.

Aquesta tesi és un esforç per entendre alguns aspectes lligats a aquesta fenomenologia. L'objectiu primari és el de emfatitzar la importància de les excitacions de llarga escala en aquests sistemes, un aspecte la comprensió complerta del qual ens pot donar la solució a un dels camps més controvertits de la Física Estadística moderna.

Un vidre d'espí és un material magnètic amb competència d'interaccions de signe aleatori entre els moments magnètics. La conseqüència principal és que la configuració de l'estat fonamental no pot minimitzar tots els acoblaments, això és el que s'anomena *frustració*. La frustració és el que origina un paisatge d'energia lliure amb una estructura molt complexa, amb molts estats metaestables de baixa energia que donen lloc a la lenta relaxació cap a l'estat d'equilibri que s'observa experimentalment. Aquesta dinàmica lenta, també anomenada dinàmica vítria, és la que origina una fenomenologia molt rica d'origen dinàmic en què destaquen l'envelliment, la violació del teorema de fluctuació-dissipació i també les propietats caòtiques com el rejuveniment i la memòria en la relaxació magnètica. De fet, molts d'aquests fenòmens no són exclusius dels vidres d'espí sinó que presenten marcades similituds amb altres sistemes vitris molt diferents com els vidres estructurals, els medis granulars i els medis superconductors amb punts d'ancoratge. En general, aquesta fenomenologia comuna s'atribueix a la universalitat en l'organització de les valls, punts de sella i barreres en el paisatge d'energia lliure.

Un vidre d'espí a temperatura alta està en una fase paramagnètica en la qual els espins giren a l'atzar al llarg del temps i per tant, la mitjana de la magnetització local s'anul·la. A temperatura baixa, els espins es queden congelats en direccions aleatòries; per això,

tot i que la magnetització total és finita, la magnetització global es fa zero, i per tant no és un bon paràmetre d'ordre. En aquesta mena de sistemes esperem que l'atzar redueixi les correlacions en l'espai a uns pocs espins, tot i això, donat que els moments magnètics estan congelats, les correlacions temporals són molt llargues. Una mesura del quadrat de la magnetització local s'obté a través de la mitjana de la funció d'auto-correlació $\langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle$. Aquest és el paràmetre d'ordre proposat per Edwards i Anderson, q_{EA} . Aquest paràmetre és sensible al trencament d'ergodicitat. A temperatura alta només hi ha una fase ergòdica i, per tant, q_{EA} s'anul·la. En canvi, per sota de la transició, l'ergodicitat es trenca i q_{EA} esdevé positiu i creix fins arribar al seu valor màxim a temperatura zero.

La transició cap a la fase de vidre d'espí (SG) és una transició de refredament en què la simetria sota inversió temporal es trenca espontàniament al igual que en una transició ferromagnètica. Aquesta transició és de segon ordre en el sentit termodinàmic: les primeres derivades dels potencials termodinàmics són contínues i, per tant, no hi ha calor latent; el paràmetre d'ordre és continu; els temps de relaxació divergeixen quan el sistema s'apropa a la temperatura crítica. Tot i així, aquesta transició és peculiar perquè ni la susceptibilitat lineal ni la calor específica divergeixen al punt crític.

1.2 Fets experimentals

La primera evidència experimental del comportament de vidre d'espí va aparèixer el 1972 quan Cannella i Mydosh van trobar un pic molt pronunciat en la susceptibilitat alterna per camps aplicats molt baixos en dilucions d'elements de transició en matrius de metalls nobles [CM72]. La posició del pic de la susceptibilitat determina la temperatura de refredament dels espins T_f o de transició cap a la fase SG. T_f depèn en la freqüència del camp altern ω , però el valor que es pot extrapolar per freqüències molt curtes és diferent de zero. Això implica que hi ha una transició a temperatura finita, però que a temperatura baixa el sistema no pot assolir l'equilibri durant el temps que dura l'experiment. De fet, un dels trets distintius dels vidres d'espí és que presenten efectes en una àmplia finestra de temps que s'estén més de setze ordres de magnitud, des dels $10^{-12}s$ típics de la difracció de neutrons fins als 10^4s típics en les mesures de magnetització.

A continuació s'exposen les principals observacions experimentals.

■ Calor específica:

La calor específica conté tota la informació sobre els graus de llibertat del sistema per això la informació sobre les excitacions es pot extreure de l'anàlisi de la calor específica al voltant de la temperatura crítica i a prop de temperatura zero. A la transició la calor específica no divergeix però presenta un màxim bastant ample. Aquest fet es deu a que aquesta és una transició d'una fase desordenada (paramagnètica) a una menys desordenada (vidre d'espí). A temperatura molt baixa la calor específica és lineal. Amb arguments molt senzills es pot arribar a la conclusió que això és possible si la densitat d'estats amb gap zero és finita ¹.

¹gap és la diferència d'energia entre l'estat excitat i l'estat fonamental

■ Susceptibilitat lineal:

Ja hem dit que la susceptibilitat no divergeix a la transició, només presenta un pic arrodonit a la temperatura de transició. A la fase d'alta temperatura segueix una llei de Curie-Weiss típica dels paramagnets, $\chi = 1/T$. Sota la transició comença a decreixer a causa de la congelació dels moments magnètics. La susceptibilitat lineal no divergeix perquè no hi ha ordre de llarg abast, en canvi el quadrat de la susceptibilitat sí que divergeix a la transició i es pot caracteritzar amb els exponents crítics habituals. Aquesta quantitat s'anomena susceptibilitat de vidre d'espí χ_{SG} .

A temperatura baixa la susceptibilitat lineal depèn fortament del procés de refredament, donant lloc a efectes irreversibles típics d'una situació fora de l'equilibri. La relaxació de la magnetització pot ser extremadament lenta la qual cosa està relacionada amb l'existència de moltes valls profundes en les que el sistema es pot quedar atrapat segons el protocol de refredament que s'ha seguit. Quan la temperatura és molt baixa els temps de relaxació són tant grans que només es pot explorar una regió de l'espai de les fases durant el temps de mesura i per tant, hi ha irreversibilitat. Aquesta situació es coneix com *trencament feble de l'ergodicitat*.

■ Envelliment:

Per envelliment entenem la dependència de l'evolució dinàmica del sistema en la seva història tèrmica prèvia. Des de les primeres observacions d'envelliment en polímers amorfs [Str78], l'envelliment ha estat observat en molts altres sistemes amb i sense desordre amb una evolució cap a l'estat d'equilibri molt lenta com els vidres orientacionals, els líquids sobre-refredats, els gels, les escumes, els sistemes granulars i les xarxes de vòrtex en superconductors. El procediment estàndard és el següent: refredar des de temperatura alta fins a una temperatura per sota de transició; esperar durant t_w i aplicar una pertorbació i mesurar la resposta durant un temps d'observació t . Aquesta pertorbació pot ser de qualsevol mena: un esforç mecànic en polímers o un camp elèctric en gels. Hi ha envelliment si la corba de relaxació mesurada depèn del temps d'espera t_w . De fet, la resposta a qualsevol pertorbació es pot separar en dues contribucions diferents: una part estacionària i una part d'envelliment que en general és una funció d'escala. La típica variable d'escala en un vidre d'espí és t/t_w que implica que el temps de relaxació creix proporcionalment a l'envelliment del sistema. Aquest és el que es coneix com *envelliment total* [VHO⁺96].

Un dels resultats experimentals que més interès han acaparat últimament són els efectes de *rejuveniment i memòria* observats en els protocols de canvis de temperatura. Aquests fets estan lligats a la independència dels processos d'envelliment a temperatures diferents. El protocol experimental és el següent: refredar la mostra des de la fase paramagnètica a una temperatura T_1 per sota de transició; després mesurar la resposta a un camp oscil·lant de freqüència ω durant t_w ; després canviar la temperatura del sistema a T_2 i mesurar la resposta durant t_w ; finalment, posar el sistema a la temperatura inicial. Si el canvi de temperatura és negatiu, s'observa que després del canvi la corba de relaxació fa un salt i comença abruptament des d'un valor més

alt. La relaxació no es alenteix sinó que torna a començar un altre cop. Aquest efecte caòtic és el que es coneix com rejuveniment. A més, quan tornem a la temperatura T_1 la relaxació continua des del punt on ho havia deixat abans de refredar el sistema a T_2 . Això és el que s'anomena memòria i no s'observa quan el canvi de temperatura és positiu. Aquest ha estat interpretat en termes de dinàmica jeràrquica: cada nivell de descripció o longitud d'escala té la seva dinàmica independent. A cada temperatura podem associar l'escala de longitud explorada a t_w , de manera que si les escales de longitud a temperatures diferents estan prou separades, els processos d'envel·liment a cada temperatura són independents.

1.3 Fonaments teòrics

L'activitat teòrica en el camp dels vidres d'espí va començar el 1975 quan Edwards i Anderson van formular un model que deixant a banda els detalls microscòpics del sistema copsés la física essencial d'un vidre d'espí [EA75]. En aquest model els moments magnètics són variables d'Ising distribuïdes en una xarxa cúbica. El desordre en aquest model s'introdueix via els acoblaments entre espins, J_j . Aquests són variables aleatòries amb mitjana zero i variança d'ordre 1. L'Hamiltonià és el següent, $\mathcal{H} = - \sum_{ij} S_i S_j$, on les interaccions es restringeixen normalment a primers veïns.

Qualsevol model de vidre d'espí es caracteritza per l'existència de competència entre interaccions magnètiques aleatòries. Distingim entre dos tipus de variable diferent, les variables tèrmiques (*annealed*) que canvien amb el temps i la temperatura, és a dir els espins, i les variables congelades (*quenched*) que estan sempre fixes i corresponen als acoblaments entre espins.

■ Mitjanes:

Treballarem amb sistemes a temperatura i volum fixes (T, V). Per tant, el potencial termodinàmic rellevant és l'energia lliure de Helmholtz, $F = E - k_B T S$ on E és l'energia, S és l'entropia i k_B és la constant de Boltzmann.

En general, un sistema desordenat està definit per l'Hamiltonià que depèn tant dels espins com dels acoblaments. Per obtenir l'energia lliure cal dur a terme dos tipus de mitjana: la mitjana tèrmica estàndard en la col·lectivitat canònica i el mitjana sobre totes les possibles realitzacions del desordre. És important assenyalar que els sistemes reals corresponen a una sola realització del desordre. Per això per tal de comparar la teoria amb els experiments interessaria més conèixer l'energia lliure per uns acoblaments fixos que no pas el seu mitjana. Malauradament, això és impossible perquè no es pot determinar la disposició microscòpica dels àtoms ni les seves interaccions. Tot i així, l'energia lliure és una quantitat *auto-promitjana* la qual cosa implica que en el límit termodinàmic l'energia lliure per uns acoblaments fixats és igual al seu mitjana.

■ El truc de la rèplica:

Per calcular l'energia lliure cal calcular el mitjana del logaritme de la funció de partició, $F = -k_B T \ln \mathcal{Z}$. Normalment, aquesta és una tasca molt difícil i per aquest

motiu es va introduir la següent definició de logaritme,

$$\ln x = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{x^n - 1}{n} \quad (\text{G.5})$$

D'aquesta manera, per obtenir el mitjana de l'energia lliure cal calcular el mitjana de la funció de partició de n còpies idèntiques del sistema que anomenem rèpliques, \mathcal{Z}^n .

■ **Paràmetre d'ordre:**

Quan treballem amb rèpliques, el paràmetre d'ordre rellevant és l'*overlap* que és el producte escalar entre dues rèpliques, $q = \frac{1}{V} \sum_i S_i S_j$. En principi, l'overlap pot prendre qualsevol valor entre 1 i -1 . En la teoria de camp mig el paràmetre d'ordre d'equilibri és diferent del q_{EA} aquesta diferència apareix perquè per sota de la temperatura de transició l'espai de les fases es trenca en moltes components ergòdiques. Això vol dir que hi ha molts estats purs que estan relacionats entre ells. Aquest fet queda reflectit en la distribució de probabilitat del paràmetre d'ordre, $P(q)$. Contràriament a l'energia lliure la distribució del paràmetre d'ordre no és, en general, una quantitat auto-promitjant.

1.4 Teoria de camp mig

Una de les fites principals en la teoria dels vidres d'espí va ser la solució de la teoria de camp mig trobada per Parisi [Par79]. La comprensió d'aquesta teoria va introduir molts conceptes nous: la definició d'un paràmetre d'ordre adient $P(q)$ així com l'ultrametricitat i el trencament de l'ergodicitat que va donar lloc a la imatge d'un paisatge d'energia lliure amb una estructura jeràrquica de pous dins pous.

Aquí ens limitarem a descriure el model de Sherrington-Kirkpatrick (SK) però cal notar que el marc general és vàlid per a qualsevol model de camp mig. El model SK està format per espins de tipus Ising que interactuen per parelles via acoblaments triats a l'atzar amb mitjana zero i variança de l'ordre de la grandària del sistema per assegurar l'extensivitat de l'energia. L'Hamiltonià és el següent, $\mathcal{H} = - \sum_{i < j} J_{ij} S_i S_j$.

Per tal de solucionar la termodinàmica del model cal introduir rèpliques. D'aquesta manera es pot dur a terme la mitjana sobre el desordre pagant el preu d'introduir acoblaments entre rèpliques. L'energia lliure en el límit termodinàmic s'obté de minimitzar el funcional que depèn de la matriu Q_{ab} , els elements de la qual s'identifiquen amb les correlacions entre diferents rèpliques, $Q_{ab} = \overline{S^a S^b}$. A alta temperatura la solució correspon a suposar que tots els elements de la matriu són iguals $Q_{ab} = q = 0$. Aquesta és la solució anomenada *rèplica simètrica* que descriu la fase paramagnètica. Però, si abaixem la temperatura, aquesta solució esdevé inestable. Aleshores cal suposar una certa forma per la matriu Q_{ab} en què no tots els elements de la matriu són iguals, és a dir cal trencar la simetria entre rèpliques. La manera com cal fer-ho va ser descoberta per Parisi. La idea és la d'agrupar rèpliques en diferents conjunts de manera que la correlació (o overlap) entre rèpliques pertanyents al mateix grup no sigui la mateixa que entre rèpliques pertanyents a grups diferents. La solució final correspon a un trencament infinit de la simetria entre

rèpliques de manera que els elements de la matriu són una funció contínua del paràmetre $x \in [0, 1]$, $q(x)$.

Per tant, en la transició es trenquen dues simetries: la simetria sota inversió temporal i la simetria entre rèpliques. Això vol dir que hi ha més de dos estats purs, és a dir, més de dues components ergòdiques en l'espai de les fases. Les conseqüències del trencament d'ergodicitat expressada formalment com RSB són dues: *i*) que l'organització dels estats és tal que segueixen l'estructura d'un arbre ultramètric. Ultrametricitat vol dir que donades tres rèpliques les distàncies entre elles guarden les mateixes relacions que un triangle equilàter o isòscels amb els dos costats iguals més llargs que l'altre; *ii*) que el paràmetre d'ordre presenta fortes fluctuacions d'una realització del desordre a una altra, fet que és equivalent a dir que la probabilitat conjunta de dos overlaps, $P(q_1, q_2) \neq P(q_1, q_2)$.

1.5 Teories d'escala: el models dels *droplets*

L'existència de moltes fases d'equilibri és una de les diferències principals amb la teoria fenomenològica desenvolupada per vidres d'espí amb interaccions de curt abast sobretot per Fisher i Huse [FH86] i Bray i Moore [BM87]. El model dels droplets pretén descriure la fase de baixa temperatura d'un vidre d'espí utilitzant idees del grup de renormalització. En aquesta descripció un vidre d'espí és un ferromagnet disfressat amb només un estat d'equilibri (i la configuració corresponent a invertir les orientacions de tots els espins) en què els espins estan orientats en direccions a l'atzar. Per tant l'overlap només pot prendre dos valors $q = q_{EA}$.

La fase freda està plenament descrita per la física a prop de $T = 0$. A qualsevol temperatura prou per sota de la transició, un vidre d'espí es pot descriure per l'estat fonamental més una excitació o *droplet* de diferent dimensió lineal L . En general, en un sistema en d dimensions, un droplet és un grup compacte d'espins de volum L^d i superfície de dimensió fractal L^{d_s} . El cost d'energia lliure que costa girar un droplet és en general $F_{tip} \sim L^\theta$, on $\theta \leq \frac{d-1}{2}$, ja que esperem que com els espins estan orientats a l'atzar, el cost sigui menor que el de girar una paret de domini en un ferromagnet. L'energia lliure associada a cada droplet està àmpliament distribuïda però té un pes finit a zero $\rho(0) = \hat{\rho}(0)/F_{tip}$.

El fet que els espins a la superfície del droplet estiguin orientats en direccions aleatòries és la causa que siguin molt sensibles a les pertorbacions externes, i, en concret als canvis de temperatura: les configuracions d'equilibri a dues temperatures diferents són diferents més enllà d'una longitud de *crossover* $l_{\Delta T}$. Aquesta és la longitud del caos associada al caos en els vidres d'espí [BM87] que recentment ha estat utilitzada per a justificar el efectes de rejuveniment en els experiments [YLB01].

Un altre punt interessant és el de l'exponent tèrmic θ , el signe del qual estableix si la fase de vidre d'espí és estable o no a temperatura zero. Per una banda si $\theta < 0$, grans regions es poden invertir sense pràcticament cap cost en energia, i, per tant, l'ordre a temperatura zero no és estable respecte les fluctuacions tèrmiques. Aquest és el cas de sistemes en dimensions finites $d = 1, 2$ que precisament tenen un punt crític a temperatura

zero. Aleshores l'exponent que assenyalava la divergència de la longitud de correlació està relacionat amb l'exponent tèrmic $\nu = -1/\theta$. En canvi si $\theta > 0$ les excitacions grans costen massa energia de manera que l'ordre existent a temperatura zero es veu poc alterat a temperatura finita. El cas $\theta = 0$ és el cas marginal que correspon als models de camp mig, en què excitacions de qualsevol grandària tenen un cost $\mathcal{O}(1)$.

1.6 Dinàmica

En el model dels droplets la dinàmica està dominada per l'activació sobre les barreres, $B(L)$. La regió equilibrada creix lentament amb el temps per anihilació de diferents droplets (regions no equilibrades). Els temps de relaxació segueixen una relaxació tipus Arrhenius, $t \sim \exp[\beta B]$ i per tant la llei de creixement dels dominis és logarítmica. La separació exponencial entre escales de temps condueix de manera natural a una dinàmica jeràrquica perquè a temperatures diferents les escales de longitud actives són molt diferents. Aquest és un ingredient en comú amb els models jeràrquics inspirats en la teoria de camp mig per a explicar els efectes caòtics observats en els experiments. En aquest marc l'envelliment s'interpreta com els efectes no estacionaris que apareixen quan el temps d'observació t és de l'ordre de l'edat del sistema $t + t_w$ i l'escala de longitud activa dinàmicament és comparable a la talla de les regions equilibrades. En canvi, quan el temps d'observació és molt menor que l'edat del sistema, la dinàmica és estacionària perquè el sistema explora les regions equilibrades.

Aquesta clara separació entre escales de temps també es troba en les solucions de les equacions dinàmiques dels models de camp mig. Les solucions mostren que la funció de correlació C es pot separar en dues parts i que la separació entre ambdues ve marcada pel valor $C = q_{EA}$: una part estacionària que varia quan el temps d'observació és menor que l'edat del sistema, $C > q_{EA}$, i una part d'envelliment que varia quan el temps d'observació és similar a l'edat del sistema $C > q_{EA}$.

Està clar que qualsevol descripció teòrica d'un vidre d'espí ha de tenir una clara separació entre dinàmica estacionària i no estacionària, però la interpretació dels experiments encara no està consensuada. El debat encara es va fer més evident a l'hora d'interpretar els efectes de rejuveniment i la memòria en els protocols de canvi de temperatura. En el context dels droplets, és creu que la naturalesa caòtica dels vidres d'espí és a l'origen del fort rejuveniment que s'observa en la susceptibilitat alterna quan es baixa significativament la temperatura. Quan es torna a la temperatura inicial, la memòria es recupera sempre que els temps siguin prou curts com per a assegurar que la diferència entre escales de longitud és prou gran. Una altra interpretació és la dels models jeràrquics. En aquests models no hi ha caos, sinó que la idea és la de traslladar l'estructura jeràrquica del paisatge d'energia lliure típica dels models de camp mig a l'espai real. Cada temperatura té associada una escala de longitud de manera que la temperatura juga el paper d'un microscopi que revela els detalls més fins del sistema [BDHV01]. A T_1 el sistema és capaç d'equilibrar una regió de dimensió L . Com que les reestructuracions de les escales més petites han de tenir lloc abans d'equilibrar regions més grans, l'evolució de les parets de domini és molt lenta. En abaixar la temperatura, escales més curtes cauen fora d'equilibri

de manera que, mentre hi hagi una separació dràstica de entre les escales actives a T_1 i T_2 , es pot observar el rejuveniment associat al començament del procés d'envelliment d'aquestes regions més petites. De nou, la memòria es recupera si el temps passat a la temperatura més baixa és prou curt.

2. Objectius

L'existència d'excitacions amb baix cost energètic és típica de molts sistemes desordenats incloent magnets aleatoris i superfícies desordenades. L'objectiu d'aquesta tesi és estudiar diversos aspectes de les excitacions típiques. En aquest treball intentarem esbrinar quines són les propietats genèriques d'aquestes excitacions baixes en espectre que apareixen a temperatures finites. Hem vist que, a part de la teoria de camp mig, la descripció de la fase de baixa temperatura es basa en lleis d'escala que no estan ben fonamentades. Per aquest motiu molts autors han confiat plenament en els mètodes numèrics per a caracteritzar degudament aquestes excitacions. El primer intent en aquesta direcció va ser el mètode de les parets de domini (DW) proposat per a estimar l'exponent tèrmic θ [McM84d]. Avui en dia, a part de l'interès de determinar l'exponent tèrmic es dedica molta atenció a caracteritzar aquestes excitacions també des d'un punt de vista topològic. En aquesta tesi no intentarem analitzar directament les excitacions típiques sinó que intentarem deduir les seves propietats a partir del comportament observat a baixes temperatures.

Primer ens centrarem en l'estudi de les fluctuacions del paràmetre d'ordre. En els vidres d'espí de camp mig, el paràmetre d'ordre fluctua molt en funció de la mostra del desordre. Això es produeix perquè en el límit termodinàmic existeixen moltes excitacions de gran escala amb probabilitat finita. Aquestes excitacions tenen un overlap molt petit amb l'estat fonamental. En un sistema amb dimensió finita té lloc aquesta mateixa situació, almenys quan la talla del sistema és finita perquè les excitacions grans contribueixen a les fluctuacions del paràmetre d'ordre (OPF) amb probabilitat finita $\sim L^{-\theta}$. Per tant, l'anàlisi de les OPF és útil per diferenciar la fase d'alta temperatura de la de baixa temperatura en què les grans excitacions anòmales esdevenen rellevants. A més a més, de les OPF podem extreure informació sobre l'organització de les excitacions. En camp mig, sabem que diferents estats purs estan relacionats de tal manera que la distribució conjunta de més d'un overlap verifica certes regles de suma. Per tant es pot mesurar la manca d'autopromig de la distribució de l'overlap a través d'aquestes sumes a la vegada que s'obté informació sobre els lligams entre diferents estats. Per aquesta raó s'han investigat dos paràmetres adimensionals, A i G que mesuren aquests diferents aspectes.

Els paràmetres A i G es defineixen de la següent manera,

$$G = \frac{\overline{\langle q^2 \rangle^2} - \overline{\langle q^2 \rangle}^2}{\langle q^4 \rangle - \overline{\langle q^2 \rangle}^2}, \quad (\text{G.6})$$

$$A = \frac{\overline{\langle q^2 \rangle^2} - \overline{\langle q^2 \rangle}^2}{\overline{\langle q^2 \rangle}^2}. \quad (\text{G.7})$$

El paràmetre A mesura les fluctuacions de la susceptibilitat de vidre d'espí i roman diferent de zero només si hi ha trencament de simetria de rèpliques. El paràmetre G en base a les regles de suma vàlides en camp mig al límit termodinàmic esdevé una funció esglaó,

$$G = \frac{1}{3} \Theta(T_c - T) \quad . \quad (\text{G.8})$$

Per tal d'emfatitzar la potència d'aquests paràmetres hem investigat numèricament diversos models a la vegada que hem fet una comparació exhaustiva amb altres quantitats més tradicionals com el paràmetre de Binder. Aquest paràmetre mesura la curtosí de la distribució del paràmetre d'ordre i és molt efectiu en sistemes que, com els ferromagnets, contenen la simetria sota inversió temporal en l'Hamiltonià. En canvi, en vidres d'espí sense aquesta simetria el paràmetre de Binder no funciona i pot esdevenir fins i tot negatiu. En aquests sistemes també es poden definir les quantitats connexes A_c i G_c en què el moments de l'overlap son substituïts pels moments connexes $\langle (q - \langle q \rangle)^k \rangle$.

El comportament de les fluctuacions del paràmetre d'ordre a temperatures molt baixes també es pot estudiar a partir d'una anàlisi de temperatura zero. Aquesta és la idea subjacent en qualsevol teoria d'escala que intenta descriure les excitacions grans seguint les premisses del grup de renormalització estàtic. En aquesta tesi les propietats de baixa temperatura s'han estudiat des d'una òptica diferent. Aquest és un tractament novedós consistent en l'estudi de les primeres excitacions, és a dir, aquelles excitacions més properes en energia a l'estat fonamental. En sistemes com els vidres d'espí en què la frustració juga un paper central, les excitacions situades en la part baixa de l'espectre d'energies estan molt disperses en l'espai de les fases. Poden pertànyer a la mateixa vall d'atracció que l'estat fonamental o a una vall diferent amb un overlap molt petit amb l'estat fonamental (o equivalentment a una distància considerable en l'espai de les fases). La principal hipòtesi de partida és que el caràcter aleatori es reflexa en l'espectre de nivells donant lloc al que anomenem *formulació de grandàries i energies aleatòries*. En aquesta formulació els gaps entre les diferents excitacions de l'espectre són variables aleatòries independents que no estan correlacionades amb la talla de l'excitació. Assumint la validesa d'aquestes hipòtesis, esperem que l'estadística de les primeres excitacions contingui tota la informació sobre les excitacions de la part baixa de l'espectre i en conseqüència la de les excitacions típiques. La connexió entre les primeres excitacions i les típiques es pot fer via lleis d'escala amb què es caracteritzen les primeres excitacions que ocupen una fracció finita dels espins que formen el sistema. Per això, el principal interès serà analitzar quines propietats de baixa temperatura es poden induir a partir d'aquestes lleis d'escala.

Finalment, tractarem un aspecte diferent corresponent a la dependència del paisatge d'energia lliure en la temperatura. Aquest és el que es denomina problema del caos en els vidres d'espí. La sensibilitat extrema de la configuració d'equilibri respecte a un canvi de temperatura és una de les principals hipòtesis en la teoria dels *droplets*. La idea de caos també havia estat introduïda dins del context de camp mig, on donat que les energies són variables independents [MPV85], és raonable assumir que els pesos dels

estats d'equilibri es redistribueixen quan canvia la temperatura. El control dels canvis del paisatge d'energia lliure a temperatura finita és especialment rellevant en els experiments de canvi de temperatura. En aquest aspecte, no és només important estudiar quins són els ingredients principals que donen peu al caos, sinó entendre si els efectes de rejuveniment es poden observar sense necessitat de veritable caos.

3. Models

Per tal d'oferir una descripció general de les excitacions en aquesta tesi s'han analitzat diversos models tant numèrica com analíticament. Normalment els vidres d'espí es modelitzen com un grup d'espins interactuant via acoblaments aleatoris. Malauradament, el tractament analític dels models que no són de camp mig és impossible i pel que fa al tractament numèric, aquest es veu molt limitat perquè els tamanys que es poden analitzar són molt modestos. Per això, hem dedicat molta atenció a l'estudi dels models de camp mig, com el model de Sherrington-Kirkpatrick i el 3-spin, perquè es pot tenir un bon control sobre els resultats numèrics obtinguts per sistemes finits. A més a més, aquest estudi ens ha servit per fonamentar l'estudi exclusivament numèric del model de Edwards-Anderson en dimensió 1, 2, 3.

Donades aquestes dificultats, és molt instructiu estudiar una altre classe de sistemes com són els medis elàstics amb desordre. Aquests sistemes comparteixen molts dels trets distintius dels vidres d'espí incloent un estat fonamental no trivial i una dinàmica lenta. Tot i així, la presència d'elasticitat ens obre camins per al tractament numèric i analític del problema que no són presents en els vidres d'espí. Això ha motivat l'estudi de la línia elàstica en un medi desordenat en 1+1 dimensions, un model que, tot i la seva simplicitat, es creu que conté moltes de les propietats dels sistemes vitris. Un altre tipus de models són els models de potencials aleatoris que descriuen un vidre d'espí en termes de l'estadística dels nivells d'energia, de manera que només és possible una descripció en termes d'energia (lliure). Ja hem dit que l'espectre de nivells d'energia en sistemes aleatoris amb frustració és molt diferent del d'un ferromagnet en el sentit que existeixen molts estats de baixa energia que contribueixen a la termodinàmica en la fase freda. L'anàlisi des d'aquest punt de vista ofereix una manera molt més simple d'analitzar aquest aspecte. A més, el tractament analític és viable i, per tant, dona informació complementària a la informació obtinguda a través dels models d'espins. Hem analitzat dos models: el model d'energies aleatòries (*random-energy model*), que descriu aproximadament l'estadística dels nivells d'energia dels model de camp mig [Der81] i el model de Sinai, interessant des del punt de vista dinàmic perquè és explícitament jeràrquic, i per tant permet comprovar moltes de les idees teòriques proposades per explicar els efectes de rejuveniment i memòria presents en els vidres d'espí.

Com ja s'ha esmentat el treball desenvolupat al llarg d'aquesta tesi és tant numèric com analític. Pel que fa a la part numèrica cal assenyalar que en general les simulacions de models de vidres d'espí requereixen un gran esforç computacional. Això es deu a que a baixes temperatures el nombre d'estats meta-estables creix exponencialment amb el volum del sistema. Per tant és molt difícil recórrer tot l'espai de les fases en un temps

raonable. Per aquest motiu s'han utilitzat tècniques més sofisticades que el mètode Monte Carlo, com és el Mètode de Termalització en paral·lel [HN96]. En els sistemes en una i dues dimensions s'ha utilitzat el mètode de la matriu de transferència [Nig90] que permet el càlcul exacte de la funció de partició i, per tant, de qualsevol observable termodinàmic.

4. Resultats

Ja hem dit que l'anàlisi dels models de camp mig és útil perquè els resultats numèrics es poden contrastar amb les prediccions analítiques derivades en el límit termodinàmic. Això és especialment útil en l'estudi dels paràmetres que mesuren les fluctuacions del paràmetre d'ordre, el comportament dels quals en el límit de sistemes grans es pot obtenir a partir de la propietat de l'*equivalència entre rèpliques* [Par98]. Els principals resultats obtinguts de l'anàlisi numèric dels paràmetres G i A per diferents models són els següents:

- i) G i A són una eina molt poderosa per estudiar numèricament la transició cap a la fase vidre d'espí de qualsevol model, fins i tot quan la talla del sistema és petita, quan el model no és de camp mig i quan no té simetria sota inversió temporal.
- ii) L'anàlisi numèrica dóna suport a la conjectura que en qualsevol model d'espí $G = \frac{1}{3}\Theta(T_c - T)$ en el límit de sistemes infinitament grans, independentment de si la simetria de rèpliques es trenca o no per sota de la temperatura crítica.
- iii) Aquests paràmetres prenen valors *universals* a temperatura zero per qualsevol volum del sistema. De l'estudi de les primeres excitacions se'n deriva que aquests valors universals s'assoleixen si es verifiquen les següents premisses: la unicitat de l'estat fonamental i l'existència d'excitacions sense gap amb probabilitat finita. A més, del comportament a baixes temperatures del paràmetre A podem extreure el valor de l'exponent tèrmic θ .

A prop de $T = 0$ ens concentrem en l'anàlisi de les primeres excitacions. Aquestes són *clusters*² de volum v i gap ϵ que varien per cada mostra del desordre. Quan el cluster ocupa un volum finit del volum total del sistema $V = l^d$ - d és la dimensionalitat del sistema, es pot proposar un ansatz via lleis d'escala per les distribucions del volum i el gap de les excitacions. En aquesta situació, l'estadística es pot descriure a través de dos exponents: l'exponent de l'energia θ'_l que descriu el cost energètic de les primeres excitacions $\bar{\epsilon} \sim L^{\theta'_l}$ i l'exponent entròpic λ_l que descriu la probabilitat de que la primera excitació sigui gran, $\sim V^{\lambda_l}$. Els principals resultats són els següents:

- i) A partir de l'estadística de les primeres excitacions podem obtenir l'exponent tèrmic $\theta = \theta'_l + d\lambda_l$.
- ii) Les hipòtesis contingudes en la formulació d'energies i tamanys aleatoris així com les seves prediccions han estat confirmades pels l'anàlisi numèrica de models de

²Un *cluster* és un conjunt d'espins que almenys interactuen amb un altre espí pertanyent al mateix.

camp mig i en dimensió finita: *a)* l'exponent de l'energia és suficient per descriure el comportament a temperatura baixa de quantitats relacionades amb l'energia; *b)* les quantitats relacionades amb l'overlap com la seva distribució estan dominades per l'exponent tèrmic, de manera que si $\theta = 0$, hi ha trencament de simetria de repliques i la $P(q)$ esdevé una funció no trivial de q .

- iii)* Els resultats numèrics revelen que en dimensió finita tant les excitacions de volum finit com les grans donen la mateixa contribució dominant al comportament a baixa temperatura de qualsevol observable.

Aquest últim resultat està lligat als que se n'extreuen de l'estudi del problema del caos i del rejuveniment.

- i)* El caos és un fenomen que involucra excitacions a gran escala, de manera que només si excitacions amb un overlap petit amb l'estat fonamental es veuen afavorides entròpicament, un canvi de temperatura pot induir la descorrelació de dues còpies idèntiques del sistema.
- ii)* El rejuveniment del procés d'envelliment no es troba necessàriament associat al caos, sinó que pot estar associat a la dinàmica a escales petites. Aquest és el mecanisme que apareix quan un canvi de temperatura provoca la localització en els mínims més profunds d'una vall d'energia. De les simulacions numèriques d'un model sense caos com el model de Sinai, se n'extreu que en aquesta situació dinàmiques a temperatures diferents involucren escales de longitud diferents. Per tant, a temperatura baixa la senyal d'envelliment correspon a explorar petites excitacions molt properes en l'espai de les fases.

5. Conclusions

Una idea molt estesa en els sistemes aleatoris amb frustració és que la física de baixes temperatures està governada pel punt fix de temperatura $T = 0$. qualsevol sistema es pot descriure com l'estat fonamental més un espectre d'excitacions. En aquesta tesi s'han investigat diversos aspectes de les excitacions de gran escala en general. Malgrat que la part principal d'aquesta tesi s'ha desenvolupat en el context dels vidres d'espí, moltes de les idees i resultats que s'han exposat es poden estendre a altres sistemes que presenten un espectre d'excitacions sense gap. De fet, molts dels fenòmens dinàmics observats en els vidres d'espí també s'observen en altres sistemes vitris complexos, com els vidres o els polímers, l'energia lliure dels quals té moltes característiques comunes. Precisament, l'estructura tan complexa del paisatge d'energia lliure és el que afavoreix l'existència d'excitacions rares que involucren un gran nombre dels espins o graus de llibertat que formen el sistema i, per tant, estan clarament separats de l'estat fonamental en l'espai de configuracions. En la imatge d'un paisatge rugós amb un gran nombre de pous d'energia, això vol dir que hi ha molts pous profunds que contribueixen a la termodinàmica. De la nostra anàlisi se segueix que l'existència de diverses valls ben definides és el que dóna lloc al comportament típic d'aquests sistemes en l'equilibri. Nogensmenys, petites

excitacions dins d'una mateixa vall també contenen informació sobre el comportament típic tant dinàmic com en equilibri. De totes maneres, la principal part de l'anàlisi exposat en aquesta tesi s'ha dut a terme a través d'hipòtesi d'escala que només són vàlides per a excitacions grans.

De l'estudi de les excitacions se'n pot extreure que la natura aleatòria dels sistemes amb desordre es reflecteix en la part baixa de l'espectre d'estats excitats. Aquesta és la raó per la qual a partir de l'estudi de les primeres excitacions que no són necessàriament típiques, es pot descriure el comportament d'equilibri a temperatures finites dins la fase freda. Remarcablement, en sistemes amb interaccions de curt abast, i per tant, més realistes, tant les excitacions de petita escala (pertanyents a la mateixa vall de l'estat fonamental) com les que involucren una fracció finita dels espins del sistema donen la mateixa contribució dominant a baixes temperatures. Aquest fet suggereix que ambdós tipus d'excitacions són rellevants per la física a baixes temperatures. De l'anàlisi de les fluctuacions del paràmetre d'ordre se n'extreu que, almenys quan el sistema és finit, les excitacions estan organitzades d'acord amb una estructura reminiscent de l'arbre jeràrquic dels models de camp mig. De l'estudi del problema del caos se'n deriva que el paisatge d'energia lliure a dues temperatures diferents està descorrelacionat si les excitacions de gran escala es veuen afavorides entròpicament. Tot i així, aquestes excitacions de gran escala no són necessàries per explicar els efectes dinàmics a baixes temperatures perquè aquestes escales de longitud estan presumiblement congelades. Per tant, l'activació de petites excitacions locals rellevants a temperatures molt baixes es el mecanisme que es troba a l'origen de la reinicialització del procés d'envelliment.

References

- [ABM02] T. Aspelmeier, A. J. Bray, and M. A. Moore. Why temperature chaos in spin glasses is hard to observe. *cond-mat/0207300*, 2002.
- [AC98] M. Aizenmann and P. Contucci. On the stability of the quenched state in mean field spin glass models. *J. Stat. Phys.*, 92:765, 1998.
- [AFR95] V. Azcoiti, E. Follana, and F. Ritort. Static chaos in spin glasses: the case of quenched disorder perturbations. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 28:3863, 1995.
- [AH96] A. Aharony and A. B. Harris. Absence of self-averaging and universal fluctuations in random systems near critical points. *Phys. Rev. Lett.*, 77:3700–3703, 1996.
- [AHV72] P. W. Anderson, B. I. Halperin, and C. M. Varma. *Phil. Mag.*, 25:1, 1972.
- [AM76] N.W. Ashcroft and D. Mermin. *Solid State Physics*. Holt, Rinehart and Winston, 1976.
- [AS72] M. Abramowitz and I. A. Stegun, editors. *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover, New York, 1972.
- [Bar83] N. Barber. *Phase Transitions*, chapter Finite-size scaling. Ac. Press (London), 1983.
- [Bax82] R. J. Baxter. *Exactly solved models in statistical mechanics*. Academic Press, London, 1982.
- [BB87] J. Banavar and A. J. Bray. Chaos in spin glasses: a renormalization group study. *Phys. Rev. B*, 35:8888, 1987.
- [BB02] L. Berthier and J.-P. Bouchaud. Geometrical aspects of aging and rejuvenation in the Ising spin glass: A numerical study. *Phys. Rev. B*, 2002.
- [BBDM98] H. Bokil, A. J. Bray, B. Drossel, and M. A. Moore. Comment on: A general method to determine replica symmetry breaking transitions. *Phys. Rev. Lett.*, 82:5174, 1998.
- [BBM96] L. Balents, J. P. Bouchaud, and M. Mézard. The large scale energy landscape of randomly pinned objects. *J. Phys. I. France*, 6:1007, 1996.
- [BCF⁺00] H. G. Ballesteros, A. Cruz, L. A. Fernandez, V. Martin-Mayor, J. Pech, J. J. Ruiz-Lorenzo, A. Tarancon, P. Tellez, C. L. Ullod, and C. Ungil. Critical behavior of the three-dimensional Ising spin glass. *Phys. Rev. B*, 62:14237, 2000.

- [BCGID90] J.-P. Bouchaud, A. Comtet, A. Georges, and P. le Doussal. Classical diffusion of a particle in a one-dimensional random force field. *Ann. Phys.*, 201:285, 1990.
- [BCKM98] J.-P. Bouchaud, L. F. Cugliandolo, J. Kurchan, and M. Mézard. *Spin Glasses and Random Fields*. World Scientific, Singapore, 1998.
- [BDHV01] J.-P. Bouchaud, V. Dupuis, J. Hammann, and E. Vincent. Separation of time and length scales in spin-glasses: temperature as a microscope. *Phys. Rev. B*, 65:24439, 2001.
- [BF93] L. Balents and D. S. Fisher. Large-N expansion of (4-*eps*) -dimensional oriented manifolds in random media. *Phys. Rev. B*, 48:5949, 1993.
- [BFMM⁺98a] H. G. Ballesteros, L. A. Fernandez, V. Martin-Mayor, A. Muñoz-Sudupe, G. Parisi, and J. J. Ruiz-Lorenzo. Critical exponents of the three dimensional diluted Ising model. *Phys. Rev. B*, 58:2740, 1998.
- [BFMM⁺98b] H. G. Ballesteros, L. A. Fernandez, V. Martin-Mayor, A. Muñoz-Sudupe, G. Parisi, and J. J. Ruiz-Lorenzo. The four dimensional site-diluted Ising model: a finite-size scaling study. *Nucl.Phys.*, B512[FS]:681, 1998.
- [BM80] A. J. Bray and M. A. Moore. Metastable states in spin glasses. *J. Phys. C: Solid State Phys.*, 13:L469, 1980.
- [BM84] A. J. Bray and M. A. Moore. Lower critical dimension of Ising spin glasses: a numerical study. *J. Phys. C: Solid State Phys.*, 17:L463, 1984.
- [BM85] A. J. Bray and M. A. Moore. Finite size effects in spin glass overlap functions. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 18:L683, 1985.
- [BM87] A. J. Bray and M. A. Moore. Chaotic nature of the spin-glass phase. *Phys. Rev. Lett.*, 58:57, 1987.
- [BM94] J.-P. Bouchaud and M. Mézard. Self-induced quenched disorder: A model for the glass transition. *J. Phys. I (France)*, 4:1109–1114, 1994.
- [BM97] J.-P. Bouchaud and M. Mézard. Universality classes of extreme value statistics. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 30:7997, 1997.
- [BM00] A. Billoire and E. Marinari. Evidence against temperature chaos in mean-field and realistic spin glasses. *J. Phys A: Math. Gen.*, 33:L265–L272, 2000.
- [BM02] A. Billoire and E. Marinari. Overlap among states at different temperatures in the SK model. pre-print cond-mat/0202473, 2002.
- [BMY84] A. J. Bray, M. A. Moore, and P. A. Young. Lack of self-averaging in spin glasses. *J. Phys. C*, 17:L149, 1984.
- [BO90] J. P. Bouchaud and H. Orland. On the Bethe ansatz for random directed polymers. *Journal of Statistical Phys.*, 61:877–883, 1990.
- [Bou00] J.-P. Bouchaud. *Soft and Fragile Matter*. Institut of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2000.
- [Bra88] A. J. Bray. The ordered phase of a spin-glass. *Comments Cond. Mat. Phys.*, 14:21, 1988.

- [BY86] K. Binder and A. P. Young. Spin glasses: Experimental facts, theoretical concepts and open questions. *Rev. of Mod. Phys.*, 58:801, 1986.
- [BY88] R. N. Bhatt and A. P. Young. Numerical studies of Ising spin glasses in two, three and four dimensions. *Phys. Rev. B*, 37:5606, 1988.
- [Car96] J. Cardy. *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*. Cambridge University Press, 1996.
- [CBM01] A. C. Carter, A. J. Bray, and M. A. Moore. Aspect-ratio scaling and the stiffness exponent θ for spin glasses. *Phys. Rev. Lett.*, 88:077201, 2001.
- [CGD00] P. Chauve, T. Giamarchi, and P. Le Doussal. Creep and depinning in disordered media. *Phys. Rev. B*, 62:6241, 2000.
- [Cha77] J. Chalupa. *Solid State Comm.*, 22:315, 1977.
- [CK93] L. F. Cugliandolo and J. Kurchan. Analytical solution of the off-equilibrium dynamics of a long-range spin-glass model. *Phys. Rev. Lett.*, 71:173, 1993.
- [CK95] L. F. Cugliandolo and J. Kurchan. Weak-ergodicity breaking in mean-field spin-glass models. *Phil. Mag.*, 71:501, 1995.
- [CKPR95] L. F. Cugliandolo, J. Kurchan, G. Parisi, and F. Ritort. Matrix models as solvable glass models. *Phys. Rev. Lett.*, pages 1012–1015, 1995.
- [CL95] P. M. Chaikin and T. C. Lubensky. *Principles of Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, 1995.
- [CM72] V. Cannella and J. A. Mydosh. Magnetic ordering in gold-iron alloys. *Phys. Rev. B*, 6:4220, 1972.
- [CMPR00] B. Coluzzi, E. Marinari, G. Parisi, and H. Rieger. On the energy minima of the Sherrington-Kirkpatrick model. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 33:2851, 2000.
- [CMY98] A. Comtet, C. Monthus, and M. Yor. Exponential functionals of Brownian motion and disordered systems. *J. of App. Prob.*, pages 255–271, 1998.
- [CR02a] A. Crisanti and T. Rizzo. Analysis of the ∞ -replica symmetry breaking solution of the Sherrington-Kirkpatrick model. *Phys. Rev. E*, 65:046137, 2002.
- [CR02b] A. Crisanti and T. Rizzo. Chaos in temperature in the Sherrington-Kirkpatrick model. *cond-mat/0209333*, 2002.
- [dAT78] J. R. L. de Almeida and D. J. Thouless. Stability of the Sherrington-Kirkpatrick solution of a spin glass model. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 11:983, 1978.
- [Der81] B. Derrida. Random-energy model: An exactly solvable model of disordered systems. *Phys. Rev. B*, 24:2613, 1981.
- [DJN99] C. Djurberg, K. Jonason, and P. Nordblad. Magnetic relaxation phenomena in a CuMn spin glass. *Eur. Phys. J. B*, 10:15, 1999.
- [DK83] C. Dominicis and I. Kondor. Eigenvalues of the stability matrix for parisi solution of the long-range spin-glass. *Phys. Rev. B*, 27:606, 1983.

- [DMF99] P. Le Doussal, C. Monthus, and D. Fisher. Random walkers in 1-d random environments: Exact renormalization group analysis. *Phys. Rev. E*, 59:4795, 1999.
- [dSB02] R. da Silveira and J.-P. Bouchaud. work in progress, 2002.
- [DVB⁺01] V. Dupuis, E. Vincent, J.-P. Bouchaud, J. Hammann, A. Ito, and H. A. Katori. Aging, rejuvenation, and memory effects in Ising and Heisenberg spin glasses. *Phys. Rev. B*, 64:174204, 2001.
- [EA75] S. F. Edwards and P. W. Anderson. Theory of spin glasses. *J. Phys. (France)*, 5:965, 1975.
- [EK01] T. Emig and M. Kardar. Probability distributions of line lattices in random media from the 1d bose gas. *Nucl. Phys. B*, 604:479, 2001.
- [FH86] D. S. Fisher and D. A. Huse. Ordered phase of short range Ising spin-glasses. *Phys. Rev. B*, 56:1601, 1986.
- [FH88a] D. S. Fisher and D. A. Huse. Equilibrium behavior of the spin-glass ordered phase. *Phys. Rev. B*, 38:386, 1988.
- [FH88b] D. S. Fisher and D. A. Huse. Nonequilibrium dynamics of spin glasses. *Phys. Rev. B*, 38:373, 1988.
- [FH91a] K. H. Fischer and J. A. Hertz. *Spin Glasses*. Cambridge University Press, 1991.
- [FH91b] D. S. Fisher and D. A. Huse. Directed paths in a random potential. *Phys. Rev. B*, 43:10728–10742, 1991.
- [FH95] S. Franz and J. Hertz. Glassy transition and aging in a model without disorder. *Phys. Rev. Lett.*, 74:2114–2117, 1995.
- [FL78] H. Fukuyama and P.A. Lee. Dynamics of the charge-density wave. i. impurity pinning in a single chain. *Phys. Rev. B*, 17:535, 1978.
- [FLN91] G. Forgacs, R. Lipowsky, and Th. M. Nieuwenhuizen. *Phase Transitions and Critical Phenomena*, volume 14. Academic Press (London), 1991.
- [FNN95] S. Franz and M. Ney-Nifle. On chaos in mean-field spin glasses. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 28:2499, 1995.
- [FPMP99] S. Franz, G. Parisi, M. Mézard, and L. Peliti. The response of glassy systems to random perturbations: A bridge between equilibrium and off-equilibrium. *J. Stat. Phys.*, 97, 1999.
- [Gan74] F. R. Gantmacher. *Theory of Matrices II*. Chelsea Publishing Company, 1974.
- [Gar85] E. Gardner. Spin glasses with p -spin interactions. *Nucl. Phys. B*, page 747, 1985.
- [GD94] T. Giamarchi and P. Le Doussal. Elastic theory of pinned flux lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 72:1530, 1994.
- [GD95] T. Giamarchi and P. Le. Doussal. Elastic theory of flux lattices in the presence of weak disorder. *Phys. Rev. B*, 52:1242, 1995.

- [GM81] D. J. Gross and M. Mézard. The simplest spin glass. *Nuc. Phys. B*, 240:431, 1981.
- [Grü88] G. Grüner. The dynamics of charge-density waves. *Rev. Mod. Phys.*, 60:1129, 1988.
- [GSN⁺88] P. Granberg, L. Sandlund, P. Nordblad, P. Svedlindh, and L. Lundgren. Observation of a time-dependent spatial correlation length in a metallic spin glass. *Phys. Rev. B*, 38:7097, 1988.
- [Gue96] F. Guerra. About the overlap distribution in mean-field spin glass models. *Int. J. Mod. Phys. B*, 10:1675, 1996.
- [Har99a] A. K. Hartmann. Computation of ground states of four-dimensional $\pm J$ Ising spin glasses. *Phys. Rev. E*, 60:5135, 1999.
- [Har99b] A. K. Hartmann. Scaling of stiffness energy for three-dimensional $\pm J$ Ising spin glasses. *Phys. Rev. E*, 59:84, 1999.
- [HH85] D. A. Huse and C. L. Henley. Pinning and roughening of domain walls in Ising systems. *Phys. Rev. Lett.*, 54:2708–2711, 1985.
- [HHF85] D. A. Huse, C. L. Henley, and D. S. Fisher. Response to comment [Kar85]. *Phys. Rev. Lett.*, 55:2924, 1985.
- [HHH93] T. Halpin-Healy and D. Herbert. *Phys. Rev. B*, 48:R1617, 1993.
- [HHZ95] T. Halpin-Healy and Y. C. Zhang. Exact free energy distribution function of a randomly forced directed polymer. *Phys. Rep.*, 254:215, 1995.
- [HK97] D. A. Huse and L-F. Ko. Scaling and chaos in periodic approximations to the two-dimensional Ising spin glass. *Phys. Rev. B*, 56:14597, 1997.
- [HK00a] K. Hukushima and H. Kawamura. Chiral-glass transition and replica symmetry breaking of three-dimensional Heisenberg spin glasses. *Phys. Rev. E*, 61:R1008, 2000.
- [HK00b] K. Hukushima and H. Kawamura. How the replica-symmetry-breaking transition looks like in finite-size simulations. *Phys. Rev. E*, 62:3360, 2000.
- [HN96] K. Hukushima and K. Nemoto. Exchange Monte Carlo method and application to spin glass simulations. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 65:1604, 1996.
- [HO02] D. Hérisson and M. Ocio. Fluctuation-dissipation ratio of a spin glass in the aging regime. *Phys. Rev. Lett.*, 88:257202, 2002.
- [HTY98] K. Hukushima, H. Takayama, and H. Yoshino. Exchange Monte Carlo dynamics in the SK model. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 67:12, 1998.
- [Huk99] K. Hukushima. Domain-wall free energy of spin-glass models: Numerical method and boundary conditions. *Phys. Rev. B*, 60:3606, 1999.
- [HVD⁺00] J. Hammann, E. Vincent, V. Dupuis, M. Alba, M. Ocio, and J.-P. Bouchaud. Comparative review of aging properties in spin glasses and other disordered materials. *J. Phys. Jpn.*, 69:206, 2000.
- [HY01] A. K. Hartmann and A. P. Young. Lower critical dimension of Ising spin glasses. *Phys. Rev. B*, 64:180404, 2001.

- [HY02] A. K. Hartmann and A. P. Young. Large-scale, low-energy excitations in the two-dimensional Ising spin glass. *cond-mat/0205659*, 2002.
- [JR89] A. Jaannathan and J. Rudnik. The spherical model for spin glasses revisited. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 22:5131, 1989.
- [JVH⁺98] K. Jonason, E. Vincent, J. Hammann, J. P. Bouchaud, and P. Norblad. Memory and chaos effects in spin glasses. *Phys. Rev. Lett.*, 81:3243, 1998.
- [JYN02a] P. Jönsson, H. Yoshino, and P. Nordblad. Symmetrical temperature-chaos effect with positive and negative temperature shifts in a spin glass. *Phys. Rev. Lett.*, 89:097201, 2002.
- [JYN⁺02b] P. Jönsson, H. Yoshino, P. Nordblad, H. Aruga Katori, and A. Ito. Domain growth by isothermal aging in 3d Ising and Heisenberg spin glasses. *Phys. Rev. Lett.*, 88:257204, 2002.
- [Kar85] M. Kardar. Roughening by impurities at finite temperatures. A comment on the letter [HH85]. *Phys. Rev. Lett.*, bf 55:2923, 1985.
- [Kar87] M. Kardar. Replica Bethe ansatz studies of two dimensional interfaces with quenched random impurities. *Nuclear Phys. B*, 290:582–602, 1987.
- [Kar96] M. Kardar. *Les Houches Summer School. Fluctuating geometries in Statistical Mechanics and Field Theory*. Elsevier, Amsterdam., 1996.
- [Kas56] T. Kasuya. Theory of metallic ferro- and antiferromagnetism on Zener’s Mode. *Prog. Theor. Phys.*, 16:45, 1956.
- [Kaw01] M. Kawasaki. The rejuvenation effect in the two-state random energy model. *J. P. S. J.*, 70:1762–1767, 2001.
- [KH88] G. Koper and H. Hilhorst. *J. Phys. (France)*, 49:429, 1988.
- [KHS92] N. Kawashima, N. Hatano, and M. Suzuki. Zero-temperature critical phenomena in two dimensional spin glasses. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 25:4985, 1992.
- [KM00] F. Krzakala and O. Martin. Spin and link overlaps in 3-dimensional spin glasses. *Phys. Rev. Lett.*, 85:3013, 2000.
- [KM01] F. Krzakala and O. Martin. Discrete energy landscapes and replica symmetry breaking at zero temperature. *Europhys. Lett.*, 53:749–755, 2001.
- [Kon89] I. Kondor. On chaos in spin glasses. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 22:L163, 1989.
- [KPY01] H.G. Katzgraber, M. Palassini, and A. P. Young. Monte Carlo simulations of spin glasses at low temperatures. *Phys. Rev. B*, 63:184422, 2001.
- [KS92] N. Kawashima and M. Suzuki. Replica optimization method for ground-state search of random spin-systems. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 25:1055, 1992.
- [KTJ76] J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless, and Raymund C. Jones. Spherical model of a spin-glass. *Phys. Rev. Lett.*, 36:1217:1220, 1976.

- [KV93] I. Kondor and A. Végso. Sensitivity of spin-glass order to temperature changes. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26:L641, 1993.
- [Lar70] A. I. Larkin. *Sov. Phys. JETP*, 31:784, 1970.
- [LBMM02] J. Lamarcq, J.-P. Bouchaud, O.C. Martin, and M. Mézard. Non-compact local excitations in spin glasses. *Europhys. Lett.*, 58:321, 2002.
- [LD98] L. Laloux and P. Le Doussal. Aging and diffusion in low dimensional environments. *Phys. Rev. E*, 57:6296, 1998.
- [LN01] D. K. Lubensky and D. R. Nelson. Single molecule statistics and the polynucleotide unzipping transition. *Phys. Rev. E*, 65:031917, 2001.
- [LSNB83] L. Lundgren, P. Svedlindh, P. Nordblad, and O. Beckman. Dynamics of the relaxation-time spectrum in a CuMn spin-glass. *Phys. Rev. Lett.*, 51:911, 1983.
- [MB80] I. Morgenstern and K. Binder. *Phys. Rev. Lett.*, 43:1615, 1980.
- [McM84a] W. L. McMillan. Cluster-quench simulation of the two-dimensional random Ising model. *J. Phys. C: Solid State Phys.*, 17:3189, 1984.
- [McM84b] W. L. McMillan. Domain-wall renormalization group study of the three-dimensional random Ising model. *Phys. Rev. B*, 30:476, 1984.
- [McM84c] W. L. McMillan. Domain-wall renormalization group study of the two dimensional random Ising model. *Phys. Rev. B*, 29:4026, 1984.
- [McM84d] W. L. McMillan. Scaling theory of Ising spin glasses. *J. Phys. C: Solid State Phys.*, 17:3179, 1984.
- [MD02] C. Monthus and P. Le Doussal. Localization of thermal packets and metastable states in Sinai model. cond-matt/0202295, 2002.
- [Mé90] M. Mézard. On the glassy nature of random directed polymers in two dimensions. *Journal de Physique de France*, 51:1831–1846, 1990.
- [Mé00] M. Mézard. First steps in glass theory. preprint **cond-mat/0005173** and references therein, 2000.
- [MJN⁺95] J. Mattsson, T. Jonsson, P. Nordblad, A. Aruga Katori, and A. Ito. No phase transition in a magnetic field in the Ising spin glass $\text{Fe}_{0.5}\text{Mn}_{0.5}\text{TiO}_3$. *Phys. Rev. Lett.*, 74:4305, 1995.
- [MMZ00] E. Marinari, O.C. Martin, and F. Zuliani. Equilibrium valleys in spin glasses at low temperature. *Phys. Rev. B*, 64:184413, 2000.
- [MNP⁺98a] E. Marinari, C. Naitza, G. Parisi, M. Picco, F. Ritort, and F. Zuliani. A general method to determine replica symmetry breaking transitions. *Phys. Rev. Lett.*, 81:1698, 1998.
- [MNP⁺98b] E. Marinari, C. Naitza, G. Parisi, M. Picco, F. Ritort, and F. Zuliani. Reply to comment on: A general method to determine replica symmetry breaking transitions. *Phys. Rev. Lett.*, 81, 1998.
- [Moo02] M. A. Moore. Corrections to scaling in the droplet picture of spin glasses. cond-matt/0203469, 2002.

- [MP91] M. Mézard and G. Parisi. Replica field theory for random manifolds. *J. Phys. I (France)*, 1:809, 1991.
- [MPP01] R. Mulet, A. Pagnani, and G. Parisi. Against chaos in the naive mean-field TAP equations. *Phys. Rev. B*, 63:184438, 2001.
- [MPR94a] E. Marinari, G. Parisi, and F. Ritort. On the 3d Ising spin glass. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 27:2687, 1994.
- [MPR94b] E. Marinari, G. Parisi, and F. Ritort. Replica field theory for deterministic models (i & ii). *J. Phys. A: Math. Gen.*, 27:(I) 7615–(II)7647, 1994.
- [MPRL98a] E. Marinari, G. Parisi, and J. J. Ruiz-Lorenzo. On the phase structure of the 3d Edwards-Anderson spin glass. *Phys. Rev. B*, 58:14863, 1998.
- [MPRL98b] E. Marinari, G. Parisi, and J. J. Ruiz-Lorenzo. *Spin Glasses and Random Fields*, page 59. World Scientific, Singapore, 1998.
- [MPSV84] M. Mézard, G. Parisi, N. Sourlas, and M. A. Virasoro. Replica symmetry breaking and the nature of the spin glass phase. *J. Phys. (France)*, 45, 1984.
- [MPV85] M. Mézard, G. Parisi, and M. A. Virasoro. Random free energies in spin glasses. *J. Phys. Lett. (France)*, 46:L–217, 1985.
- [MPV87] M. Mézard, G. Parisi, and M. A. Virasoro. *Spin Glass Theory and Beyond*. World Scientific (Singapore), 1987.
- [Myd93] J. A. Mydosh. *Spin Glasses*. Taylor & Francis, 1993.
- [MZ00] E. Marinari and F. Zuliani. Numerical simulations of the 4d Edwards-Anderson spin glass with binary couplings. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 32:7447, 2000.
- [Nig90] N. P. Nightingale. *Finite Size Scaling and Numerical Simulation of Statistical Systems*, chapter VII, page 289. World Scientific, 1990.
- [NKH79] S. Nagata, P. H. Keesom, and H. R. Harrison. Low-dc-field susceptibility of CuMn spin glass. *Phys. Rev. B*, 19:1633, 1979.
- [NN97] M. Ney-Nifle. Chaos and universality in a four-dimensional spin glass. *Phys. Rev. B*, 57:492, 1997.
- [NNH93] M. Ney-Nifle and H. J. Hilhorst. *Physica A*, 193:48, 1993.
- [OAH85] M. Ocio, M. Alba, and J. Hammann. *J. Phys. Lett. (France)*, 46:L1101, 1985.
- [OMM93] G. Oshanin, A. Mogutov, and M. Moreau. Steady flux in a continuous-space Sinai chain. *J. Stat. Phys.*, 73:379, 1993.
- [Pap94] C. H. Papadimitriou. *Computational Complexity*. Addison-Wesley, 1994.
- [Par79] G. Parisi. Infinite number of parameters for spin glasses. *Phys. Rev. Lett.*, 43:1754, 1979.
- [Par80] G. Parisi. The order parameter for spin glasses: A function on the interval $0 - 1$. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 13:1101, 1980.
- [Par83] G. Parisi. Order parameter for spin glasses. *Phys. Rev. Lett.*, 50:1946, 1983.

- [Par90] G. Parisi. On the replica approach to random directed polymers in two dimensions. *Journal de Physique de France*, 51:1595–1606, 1990.
- [Par98] G. Parisi. On the probabilistic formulation of the replica approach to spin glasses. preprint cond-mat/9801081, 1998.
- [Par02] G. Parisi. Complex systems: a physicist’s viewpoint. cond-mat/0205297, 2002.
- [PC99] M. Palassini and D. Caracciolo. Universal finite size scaling functions in the 3d Ising spin glass. *Phys. Rev. Lett.*, 82:5128, 1999.
- [PFC99] D. Petit, L. Fruchter, and I. A. Campbell. Ordering in a spin glass under applied magnetic field. *Phys. Rev. Lett.*, 51:911, 1999.
- [PNS86] L. Lundgren P. Nordblad and L. Sandlund. *J. Magn. Mat.*, 54:185, 1986.
- [PP79] R.G. Palmer and C.M. Pond. Internal field distributions in model spin glasses. *J. Phys. F: Metal Phys.*, 9:1451, 1979.
- [PPR99] G. Parisi, M. Picco, and F. Ritort. Continuous phase transition in a spin-glass model without time-reversal symmetry. *Phys. Rev. E*, 60:58, 1999.
- [PPRT00] A. Pagnani, G. Parisi, and F. Ricci-Tersenghi. Glassy transition in a disordered model for the RNA secondary structure. *Phys. Rev. Lett.*, 84:843, 2000.
- [PR94] M. Picco and F. Ritort. Numerical study of the Ising spin glass in a magnetic field. *J. Phys. I*, 4:1618, 1994.
- [PRS93a] G. Parisi, F. Ritort, and F. Slanina. Critical finite-size corrections for the Sherrington-Kirkpatrick spin glass. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26:247–259, 1993.
- [PRS93b] G. Parisi, F. Ritort, and F. Slanina. Several results on the finite-size corrections in the Sherrington-Kirkpatrick spin-glass model. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26:3775, 1993.
- [PRS01] M. Picco, F. Ritort, and M. Sales. Statistics of lowest excitations in two dimensional Gaussian spin glasses. cond-mat/0106554, 2001.
- [PRS02] M. Palassini, F. Ritort, and M. Sales. work in progress, 2002.
- [PRT00] G. Parisi and F. Ricci-Tersenghi. On the origin of ultrametricity. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 33:113, 2000.
- [PRTR01a] M. Picco, F. Ricci-Tersenghi, and F. Ritort. Aging effects and dynamic scaling in the 3d edwards-anderson spin glasses: a comparison with experiments. *Eur. Phys. J. B*, 21:211, 2001.
- [PRTR01b] M. Picco, F. Ricci-Tersenghi, and F. Ritort. Chaotic, memory and cooling rate effects in spin glasses: Is the edwards-anderson model a good spin glass? *Phys. Rev. B*, 63:174412, 2001.
- [pT87] T. R. Kirkpatrick and D. Thirumalai. Dynamics of the structural glass transition and the p -spin-interaction spin-glass model. *Phys. Rev. Lett.*, 58:2091, 1987.
- [PV89] G. Parisi and M. A. Virasoro. *J. Phys. (France)*, 50:3317, 1989.

- [pW87] T. R. Kirkpatrick and P. G. Wolyness. Stable and metastable states of mean field Potts and structural glasses. *Phys. Rev. B*, 36:8552, 1987.
- [PY99] M. Palassini and A. P. Young. Evidence for a trivial ground state structure in the two-dimensional Ising spin glass. *Phys. Rev. B*, 60:R9919, 1999.
- [PY00a] M. Palassini and A. P. Young. The nature of the spin glass state. *Phys. Rev. Lett.*, 85:3017, 2000.
- [PY00b] M. Palassini and A. P. Young. Triviality of the ground state in Ising spin glasses. *Phys. Rev. Lett.*, 83:5126, 2000.
- [PZZ99] F. Pázmándi, G. Zárand, and G.T. Zimányi. Self-organized criticality in the hysteresis of the Sherrington-Kirkpatrick model. *Phys. Rev. Lett.*, 83:1034, 1999.
- [Rie92] H. Rieger. The number of solutions of the Thouless-Anderson-Palmer equations for p -spin interaction spin glasses. *Phys. Rev. B*, page 14655, 1992.
- [Rie93] H. Rieger. Nonequilibrium dynamics and aging in the three-dimensional Ising spin glass model. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26:L615, 1993.
- [Rit94] F. Ritort. Static chaos and scaling behaviour in the spin-glass phase. *Phys. Rev. B*, 50:6844, 1994.
- [Riz01] T. Rizzo. Against chaos in temperature in mean field spin glass models. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 34:5531–5549, 2001.
- [Riz02] T. Rizzo. Ultrametricity between states at different temperatures in spin-glasses. *cond-mat/0207071*, 2002.
- [RK54] M. A. Ruderman and C. Kittel. Indirect exchange coupling of nuclear magnetic moments by conduction electrons. *Phys. Rev.*, 96:99, 1954.
- [RS02] F. Ritort and M. Sales. work in progress, 2002.
- [RSB⁺96a] H. Rieger, L. Santen, U. Blasum, M. Diehl, and M. Jünger. The critical exponents of the two-dimensional Ising spin glass revisited: exact ground-state calculations and Monte Carlo simulations. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 29:3939, 1996.
- [RSB⁺96b] H. Rieger, L. Santen, U. Blasum, M. Diehl, M. Junger, and G. Rinaldi. The critical exponents of the two-dimensional Ising spin-glass revisited: Exact ground state calculations and Monte Carlo simulations. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 29:3939, 1996.
- [RVHO87] P. H. Refregier, E. Vincent, J. Hammann, and M. Ocio. *J. Phys. (France)*, 48:1533, 1987.
- [RY88] J. D. Reger and A. P. Young. Computer simulations of the Heisenberg spin glass with RKKY-like coupling. *Phys. Rev. B*, 37:5493, 1988.
- [SA00] E.T. Seppälä and M. J. Alava. Energy landscapes in random systems, driven interfaces, and wetting. *Phys. Rev. Lett.*, 84:3982, 2000.
- [Sin81] G.Ya. Sinai. volume 53. Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, 1981.
- [SN00] M. Sasaki and K. Nemoto. Numerical study of aging in the generalized random energy model. *J. P. S. J.*, 69:2283–2290, 2000.

- [Som85] Sompolski. cited in p 886 of K. Binder and A. P. Young, *Rev. Mod. Phys.* **58** 801 (1986), 1985.
- [Str78] L. C. E. Struik. *Aging in Amorphous Polymers and Other Materials*. Elsevier (Houston), 1978.
- [SVDV02] M. Sasaki, J.-P. Bouchaud V. Dupuis, and E. Vincent. Corrections to perfect memory in temperature shift experiments. *cond-mat/0205137*, 2002.
- [SY02] M. Sales and H. Yoshino. Fragility of the free-energy landscape of the DPRM. *Phys. Rev. B*, 65, 2002.
- [TAP77] D.J. Thouless, P.W. Anderson, and R.G. Palmer. Solution of 'solvable model of a spin glass'. *Phil. Mag.*, 35:593, 1977.
- [VDA⁺00] E. Vincent, V. Dupuis, M. Alba, J. Hammann, and J.-P. Bouchaud. Aging phenomena in spin glass and ferromagnetic phases: domain growth and wall dynamics. *Europhys. Lett.*, 50:674, 2000.
- [VHO92] E. Vincent, J. Hammann, and M. Ocio. *Recent Progress in Random Magnets*. World Scientific, Singapore, 1992.
- [VHO⁺96] E. Vincent, J. Hammann, M. Ocio, J.-P. Bouchaud, and L. F. Cugliandolo. *Complex Behaviour of Glassy Systems*, volume 492, pages 184–219. Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, 1996. see also references therein.
- [WD95] S. Wiseman and E. Domany. Lack of self-averaging in critical disordered systems. *Phys. Rev. E*, 52:52, 1995.
- [WD98] S. Wiseman and E. Domany. Finite size scaling and lack of self-averaging in critical disordered systems. *Phys. Rev. Lett.*, 81:22–25, 1998.
- [WK75] L. E. Wenger and P. H. Keesom. Magnetic ordering of $\text{Au}_{0.92}\text{Fe}_{0.08}$: A calorimetric investigation. *Phys. Rev. B*, 11:3497, 1975.
- [YLB01] H. Yoshino, A. Lemaître, and J.-P. Bouchaud. Multiple domain growth and memory in the droplet model for spin-glasses. *Eur. Phys. J. B*, 20:267–395, 2001.
- [Yos57] K. Yosida. Magnetic properties of cu-mn alloys. *Phys. Rev.*, 106:893, 1957.
- [You98] A. P. Young, editor. *Spin Glasses and Random Fields*. World Scientific, Singapore, 1998.
- [Yp82] A. P. Young and T. R. Kirkpatrick. Low-temperature behavior of the infinite-range Ising spin-glass: Exact statistical mechanics for small samples. *Phys. Rev. B*, 25:440, 1982.

